מבחן מס' 1

פתרון שאלה מספר 1

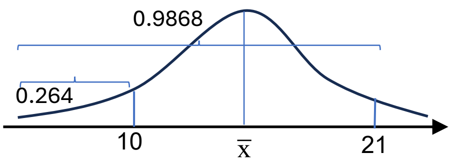
א. $p(x < 7.5) = 0.1 \Rightarrow z_{7.5} = -1.28 \Rightarrow -1.28 = \frac{7.5-\bar{x}}{S} \Rightarrow -1.28 \cdot S = 7.5 - \bar{x}$

$p(x < 20) = 1 - 0.025 = 0.975 \Rightarrow z_{20} = 1.96 \Rightarrow 1.96 = \frac{20-\bar{x}}{S} \Rightarrow 1.96 \cdot S = 20 - \bar{x}$

מחיסור המשוואות מקבלים: $-3.24S = -12.5 \Rightarrow \mathbf{S = 3.858} \Rightarrow$

$1.96 \cdot 3.858 = 20 - \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \mathbf{12.438}$

ב. $z_{10} = \frac{10-12.438}{3.858} = -0.63 \Rightarrow P(x < 10) = 0.264$



$z_{21} = \frac{21-12.438}{3.858} = 2.219 \Rightarrow P(x < 21) = 0.9868$

$\Rightarrow P(10 < x < 21) = 0.9868 - 0.264 = 0.7228 \Rightarrow$

$N = 0.7228 \cdot 16{,}000 \approx \mathbf{11{,}564}$

ג. אם נפחית 5% מגובהו של כל עץ שנמדד , הרי **שהגובה הממוצע יקטן ב- 5%.**

נקבל: $\bar{x} = 0.95 \cdot 12.438 = \mathbf{11.816}$

ההפרש בין הגובה של כל עץ שנמדד לבין הממוצע החדש יקטן אף הוא ב- 5% , לכן

גם סטיית התקן תקטן ב- 5% ותהיה $S = 0.95 \cdot 3.858 = \mathbf{3.6651}$

פתרון שאלה מספר 2

א. 1) $\frac{15x+16\cdot 8+17y}{x+8+y}=16 \Rightarrow 15x+128+17y=16x+128+16y \Rightarrow \mathbf{y=x}$

2) לא ניתן לקבוע , כי לא ידוע האם x גדול , קטן או שווה ל- 8 .

גיל (שנים)	15	16	17
מספר משתתפים	x	8	x

ב. הגיל הממוצע לא השתנה , הרי שממוצע הגילים של חמשת המשתתפים הנוספים הוא גם 16.

לכן , סכום הגילים של חמשת המשתתפים הנוספים הוא $5\cdot 16=80$.

נתון כי שניים מן הנערים שנוספו היו בני 17 לכן סכום הגילים של שלושת בני הנוער האחרים

הוא $80-2\cdot 17=\mathbf{46}$

ג. הנתונים לאחר הוספת 5 המשתתפים:

גיל (שנים)	15	16	17	?
מספר משתתפים	x	8	x + 2	3

מקבלים: $3+x+2+8+x=35 \Leftarrow 2x+13=35 \Leftarrow x=11 \Leftarrow x+2=\mathbf{13}$

הגיל של **13** מבין משתתפי המסיבה הוא 17 .

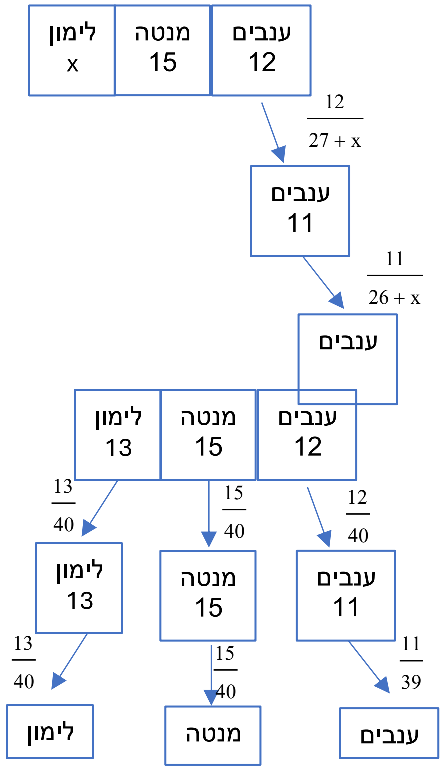
ד. 1) שיפוע ישר הרגרסיה הוא חיובי , $m=r\cdot\frac{S_y}{S_x} \Leftarrow$ אם m חיובי , גם מקדם המתאם r **חיובי.**

2) נתון : $y=1.26x-14.53$, $\bar{x}=15.5 \Leftarrow \bar{y}=1.26\cdot 15.5-14.53=\mathbf{5}$

3) $S_x=0.96$, $S_y=2.38 \Leftarrow 1.26=r\cdot\frac{2.38}{0.96} \Leftarrow \mathbf{r=0.51}$

4) $0.4<r<0.7$ לכן , הקשר הסטטיסטי בין y ו- x הוא קשר **בינוני**

פתרון שאלה מספר 3



א. 1) $\frac{12}{27+x}\cdot\frac{11}{26+x}=\frac{11}{130}\Rightarrow\frac{132}{(27+x)(26+x)}=\frac{11}{130}\Rightarrow$

$$11(702+53x+x^2)=17160\Rightarrow$$

$$x^2+53x-858=0\Rightarrow \mathbf{x=13}$$

2) ההסתברות שהאורח הראשון הוציא שתי סוכריות באותו טעם :

$$\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39}+\left(\frac{15}{40}\right)^2+\left(\frac{13}{40}\right)^2=\frac{3441}{10400}=\mathbf{0.33}$$

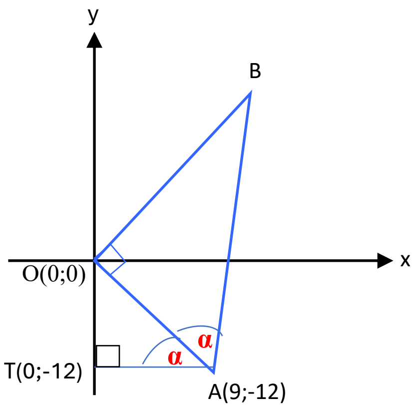
ב. מצב הסלסילה אחרי האורח הראשון:

ענבים	מנטה	לימון
11	14	13

ההסתברות להוציא כעת , ללא החזרה , שתי סוכריות בטעמים שונים היא:

$$1-\left(\frac{11}{38}\cdot\frac{10}{37}+\frac{14}{38}\cdot\frac{13}{37}+\frac{13}{38}\cdot\frac{12}{37}\right)=\frac{479}{703}=\mathbf{0.68}$$

פתרון שאלה מספר 4



א. שיעורי הנקודה T הם T(0;-12). לכן :

$\mathbf{OT = 12 , AT = 9}$.

$$OA=\sqrt{9^2+12^2} \Rightarrow \mathbf{OA=15}$$

ב. 1) $\sphericalangle OAT = \sphericalangle OAB = \alpha$ (נתון) , $\sphericalangle OTA = \sphericalangle BOA = 90^\circ$

$\Leftarrow \Delta ATO \sim \Delta AOB$ (משפט דמיון זווית, זווית)

2) $\frac{AT}{AO}=\frac{TO}{OB}=\frac{AO}{AB}$ (יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים)

$$\mathbf{OB=20} \Leftarrow \frac{3}{5}=\frac{12}{OB} \Leftarrow \frac{9}{15}=\frac{12}{OB} \Leftarrow$$

ג. 1) שיפוע הישר OA : $m=\frac{0+12}{0-9}=-\frac{4}{3}$. $\Leftarrow OB\perp OA \Leftarrow -\frac{4}{3}\cdot m_{OB}=-1 \Leftarrow m_{OB}=\frac{3}{4}$

הישר עובר דרך ראשית הצירים, לכן משוואת הישר OB היא $\mathbf{y=\frac{3}{4}x}$.

2) הנקודה B נמצאת על הישר $y=\frac{3}{4}x$ לכן נוכל לסמן : $B(x;\frac{3}{4}x)$. אורך הקטע OB הוא 20 לכן:

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(\frac{3}{4}x-0\right)^2}=20 \Rightarrow x^2+\frac{9}{16}x^2=400 \Rightarrow \frac{25}{16}x^2=400 \Rightarrow x^2=256$$

הנקודה B נמצאת ברביע הראשון, לכן , $x=16 \Rightarrow y=\frac{3}{4}\cdot 16=12 \Rightarrow \mathbf{B(16;12)}$

ד. למרובע OAEB יש זוג צלעות נגדיות מקבילות $BE \parallel OA$. צריך לבדוק האם גם שתי הצלעות האחרות מקבילות:

שיפוע הישר BE הוא $-\frac{4}{3}$. משוואת הישר BE:

$$y-12=-\frac{4}{3}(x-16) \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{100}{3} .$$

הנקודה E היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x לכן:

$$0=-\frac{4}{3}x+\frac{100}{3} \Rightarrow 4x=100 \Rightarrow x=25 \Rightarrow E(25;0)$$

שיפוע הישר AE : $m=\frac{0+12}{25-9}=\frac{3}{4} \Rightarrow m_{AE}=m_{OB}$

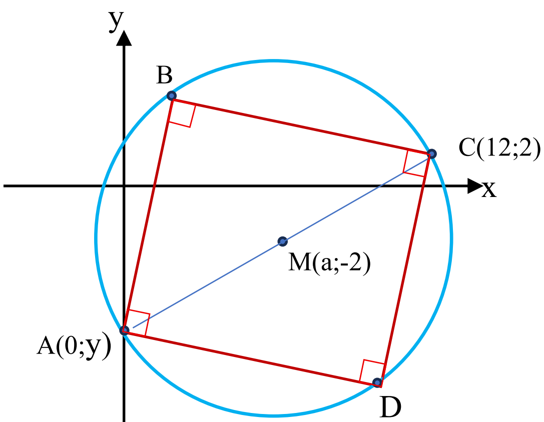
קיבלנו : $OB \parallel AE,\ BE \parallel OA$. מסקנות:

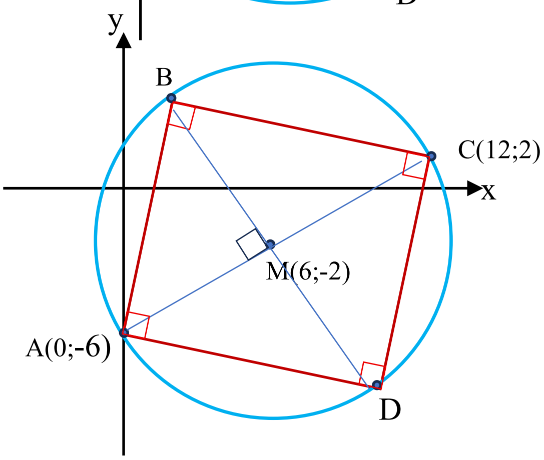
I. **נכון**- מרובע בעל שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית

II. **לא נכון**- טרפז הוא מרובע בעל זוג אחד בלבד של צלעות מקבילות

III. **נכון** - ידוע גם $\measuredangle AOB = 90^\circ$, לכן, המרובע AOBE מלבן (מקבילית בעלת זווית ישרה היא מלבן).

פתרון שאלה מספר 5





א. 1) $\measuredangle ABC = 90^\circ$ (זווית הריבוע ישרות) לכן האלכסון AC הוא קוטר במעגל ומרכז המעגל M הוא אמצע הקטע AC.

מקבלים: $-2 = \frac{2+y_A}{2} \Rightarrow y_A = -6 \Rightarrow \mathbf{A(0;-6)}$

2) $x_M = \frac{0+12}{2} = 6 \Rightarrow M(6;-2)$

$$R = \sqrt{(0-6)^2 + (-6+2)^2} = \sqrt{52}$$

משוואת המעגל: $\mathbf{(x-6)^2 + (y+2)^2 = 52}$

ב. 1) אלכסוני הריבוע מאונכים זה לזה . לכן:

$$m_{AC} = \frac{2+6}{12-0} = \frac{2}{3} \Rightarrow m_{BD} = -\frac{3}{2} = -1.5 \Rightarrow$$

משוואת האלכסון BD :

$$y+2 = -1.5(x-6) \Rightarrow \mathbf{y = -1.5x + 7}$$

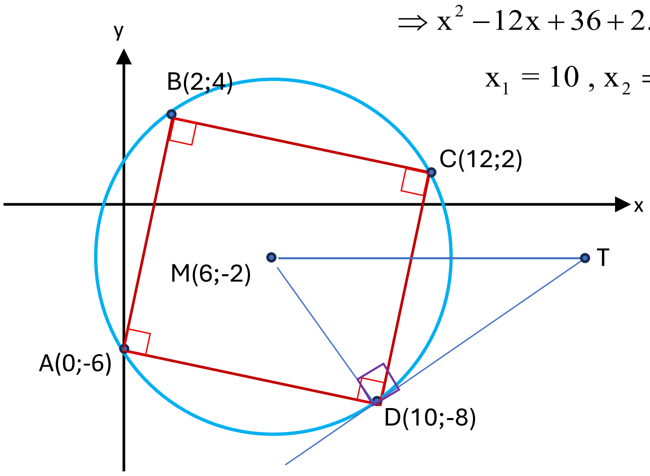
2) הנקודות B ו- D הן נקודות החיתוך של הישר $y = -1.5x + 7$ עם המעגל, לכן:

$$(x-6)^2 + (-1.5x+7+2)^2 = 52 \Rightarrow (x-6)^2 + (-1.5x+9)^2 = 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 + 2.25x^2 - 27x + 81 = 52 \Rightarrow 3.25x^2 - 39x + 65 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 10\ ,\ x_2 = 2 \Rightarrow y_1 = -1.5 \cdot 10 + 7 = -8\ ,\ y_2 = -1.5 \cdot 2 + 7 = 4$$

מתקבלות הנקודות **B(2;4)** ו- **D(10;-8)**



ג. 1) משוואת הישר MT היא $y = -2$.

המשיק DT מאונך לרדיוס MD :

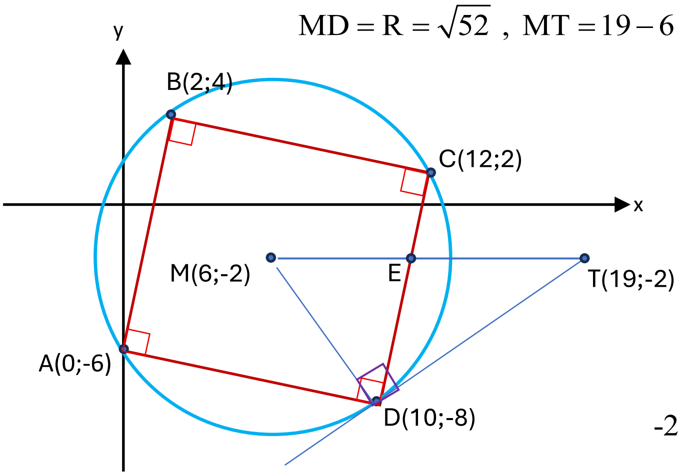
$$m_{MD} = m_{BD} = -\frac{3}{2} \Rightarrow m_{DT} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

משוואת הישר DT: $y+8=\frac{2}{3}(x-10) \Rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{44}{3}$.

הנקודה T: $y=-2 \Rightarrow -2=\frac{2}{3}x-\frac{44}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}x=\frac{38}{3} \Rightarrow x=19 \Rightarrow \mathbf{T(19;-2)}$

2) במשולש ישר-זווית MDT:

$$MD=R=\sqrt{52}\ ,\ MT=19-6=13 \Rightarrow \sin\sphericalangle MTD=\frac{\sqrt{52}}{13} \Rightarrow \boldsymbol{\sphericalangle MTD=33.69^\circ}$$



ד. 1) משוואת הצלע CD:

$$m_{CD}=\frac{2+8}{12-10}=5 \Rightarrow$$

משוואת CD:

$$y+8=5(x-10) \Rightarrow y=5x-58$$

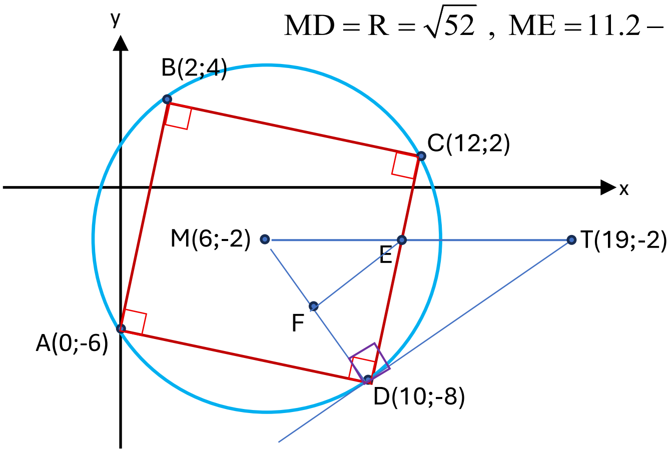
הנקודה E נמצאת על הישר $y=-2$ לכן:

$$-2=5x-58 \Rightarrow 5x=56 \Rightarrow x_E=11.2 \Rightarrow \mathbf{E(11.2;-2)}$$

2) במשולש MTD: $\sphericalangle TMD=90^\circ-\sphericalangle MTD=90^\circ-33.69^\circ=56.31^\circ$

במשולש MED:

$$MD=R=\sqrt{52}\ ,\ ME=11.2-6=5.2 \Rightarrow S_{\Delta MED}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{52}\cdot 5.2\cdot\sin 56.31^\circ=\mathbf{15.6}$$



3) במשולש MTD:

$$\sphericalangle TMD=90^\circ-\sphericalangle MTD=90^\circ-33.69^\circ=56.31^\circ$$

F אמצע MD לכן: $MF=\frac{1}{2}MD=\frac{\sqrt{52}}{2}=\sqrt{13}$

במשולש MEF:

$$MF=\sqrt{13}\ ,\ ME=11.2-6=5.2 \Rightarrow$$

$$S_{\Delta MEF}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot 5.2\cdot\sin 56.31^\circ=\mathbf{7.8}$$

פתרון שאלה מספר 6

א. 1) תחום ההגדרה: $x^2+6\neq 0 \Rightarrow x^2\neq -6$ נכון **לכל ערך של x**

2) אין אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x .

האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y : $\mathbf{y=1}$

3) חיתוך עם ציר ה- y : $f(0)=\frac{-15}{6}+1=-1.5\Rightarrow \mathbf{(0;-1.5)}$

חיתוך עם ציר ה- x :

$$0=\frac{6x-15}{x^2+6}+1\Rightarrow 6x-15+x^2+6=0\Rightarrow x^2+6x-9=0\Rightarrow$$

$$x_1=1.24\ ,\ x_2=-7.24\Rightarrow \mathbf{(1.24;0)\,,(-7.24;0)}$$

ב. 1) $f(x)=\frac{6x-15}{x^2+6}+1\Rightarrow f'(x)=\frac{6(x^2+6)-2x(6x-15)}{(x^2+6)^2}=$

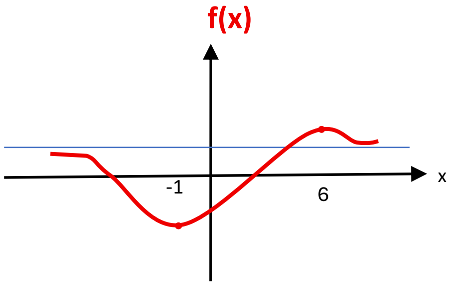
$$\frac{6x^2+36-12x^2+30x}{(x^2+6)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-6x^2+30x+36}{(x^2+6)^2}=0\Rightarrow$$

$$-6x^2+30x+36=0\Rightarrow x_1=6\ ,\ x_2=-1$$

x	x < -1	-1	< x <	6	< x
f '(x)	-	0	+	0	-
f(x)	↘	Min	↗	Max	↘

$$f(-1)=\frac{-21}{7}+1=-2\ ,\ f(6)=\frac{21}{42}+1=1.5\Rightarrow$$

מתקבלות הנקודות **(-1;-2) מינימום , (6;1.5) מקסימום** (2



ג. 1) גרף הפונקציה g(x) הוא הזזה של גרף הפונקציה f(x)

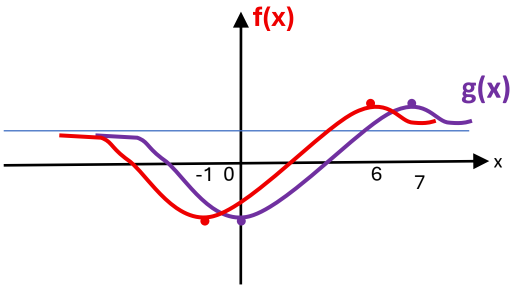
יחידה אחת ימינה:

לכן , נקודת המינימום תתקבל עבור $x=0$

ונקודת המקסימום עבור $x=7$.

כלומר , נקודות הקיצון של הפונקציה g(x)

מתקבלות בנקודות (0;-2) מינימום ו- (7;1.5) מקסימום.



2) הקטעים AB ו- CD מקבילים והאורך של כל אחד

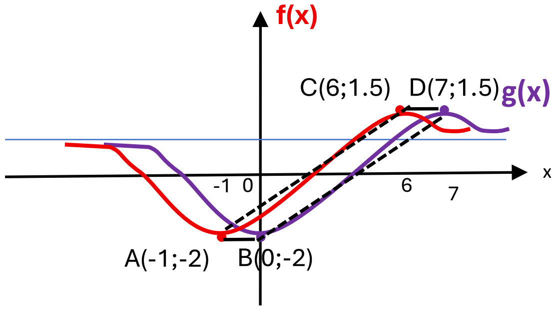
מהם הוא 1 לכן ABDC מרובע בעל זוג צלעות

שוות וגם מקבילות ולכן הוא מקבילית.

אורך הגובה לצלע AB במקבילית הוא

$1.5 - (-2) = 3.5$ ולכן שטח המקבילית

הוא $1 \cdot 3.5 = \mathbf{3.5}$



פתרון שאלה מספר 7

א. 1) תחום ההגדרה: $2x + 12 \ge 0 \Rightarrow 2x \ge -12 \Rightarrow \mathbf{x \ge -6}$

2) עם ציר ה- y : $f(0) = -3\sqrt{2 \cdot 0 + 12} = -6\sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{(0;-6\sqrt{3})}$

עם ציר ה- x : $0 = (x-3)\sqrt{2x+12} \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \mathbf{(3;0)}$

$\sqrt{2x+12} = 0 \Rightarrow 2x + 12 = 0 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow \mathbf{(-6;0)}$

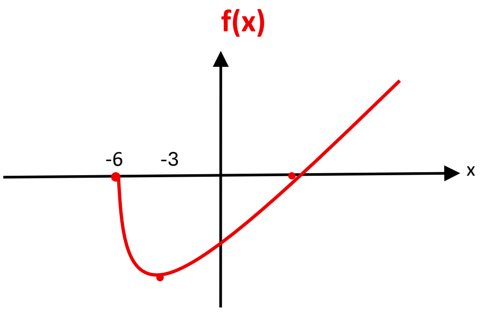
ב. 1) $f(x) = (x-3)\sqrt{2x+12} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2x+12} + (x-3) \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+12}} =$

$$= \sqrt{2x+12} + \frac{x-3}{\sqrt{2x+12}} = \frac{2x+12+x-3}{\sqrt{2x+12}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x+9}{\sqrt{2x+12}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3$

x	x < -6	-6	< x <	-3	< x
f '(x)			-	0	+
f(x)		Max	↘	min	↗

$f(-6) = 0\ ,\ f(-3) = -6\sqrt{6}$



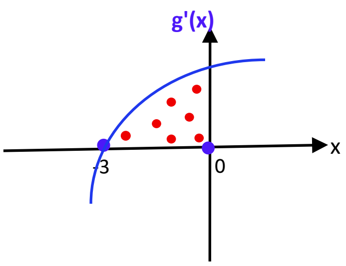
2) מתקבלות הנקודות **(-6;0) מקסימום** , **$(-3;-6\sqrt{6})$ מינימום**

ג. 1) $g(x) = 2 \cdot f(x) \Rightarrow g'(x) = 2 \cdot f'(x)$

לכן, g'(x) מוגדרת בתחום $x > -6$, $g'(-3) - 0$

g'(x) שלילית בתחום $-6 < x < -3$ וחיובית בתחום $x > -3$.

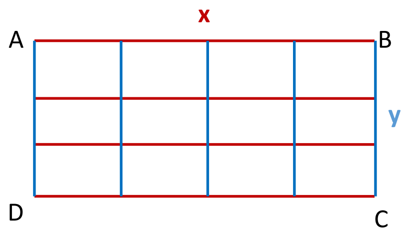
הגרף המתאים הוא **גרף (3)**



2) $S = \int_{-3}^{0} g'(x)dx = [g(x)]_{-3}^{0} = [2 \cdot f(x)]_{-3}^{0} =$

$$= 2 \cdot f(0) - 2 \cdot f(-3) = 2 \cdot (-6\sqrt{3}) - 2 \cdot (-6\sqrt{6}) = \mathbf{8.61}$$

פתרון שאלה מספר 8



א. נסמן את אורכו של כל אחד מן המוטות האופקיים ב- x ואת אורך כל אחד מן המוטות האנכיים ב- y .

נתון: $x \cdot y = 3.2 \;\Rightarrow y = \frac{3.2}{x}$

פונקציית המטרה (סכום אורכי כל המוטות) :

$$f(x) = 4x + 5y = 4x + 5 \cdot \frac{3.2}{x} \Rightarrow f(x) = 4x + \frac{16}{x}$$

תחום ההגדרה של הפונקציה, על פי תוכן השאלה : $x > 0$.

נמצא את נקודת המינימום של הפונקציה:

$$f'(x) = 4 - \frac{16}{x^2} = \frac{4x^2 - 16}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

x	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	min	↗

עבור $x = 2$ מקבלים : $y = \frac{3.2}{2} = 1.6$. לכן:

סכום אורכי המוטות האופקיים והאנכיים מינימלי כאשר **אורך כל מוט אופקי הוא 2 מ'** **ואורך כל מוט אנכי הוא 1.6 מ'**

ב. הסכום המינימלי של אורכי כל המוטות הדרושים לבניית הסורג הוא :

$f(2) = 4 \cdot 2 + \frac{16}{2} = 16$ מ' . לכן , חוט מתכת שאורכו 15 מ' **לא יספיק**

ג. היקף החלון: $P = 2x + 2y = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1.6 =$ **7.2 מ'**

מבחן מס' 2

פתרון שאלה מספר 1

א. במועד החורף: $\bar{x} = 69$, $S = 18$

במועד הקיץ: $\bar{x} = 72$, $S = 11$

הילי: $x_1 = x_2 = 80$.

ציון התקן של הילי במועד החורף: $z_1 = \frac{80-69}{18} = 0.61$

ציון התקן של הילי במועד הקיץ: $z_2 = \frac{80-72}{11} = 0.73$

$z_2 > z_1 \Leftarrow$ אחוז התלמידים שקיבלו ציון נמוך מן הציון של הילי היה גדול יותר במועד הקיץ,

לכן , הילי הצליחה יותר ביחס לשאר הנבחנים **במועד הקיץ.**

ב. 1) גליה במועד החורף : $x = 80$, $z = 0.61$. לכן:

$p(x > 80) = 1 - 0.7290 = 0.271 = \mathbf{27.1\%}$

2) גליה במועד הקיץ : אם אחוז הנבחנים שקיבלו ציון יותר גבוה מגליה היה זהה בשני המועדים, הרי שציון התקן היה זהה בשני המועדים, כלומר , ציון התקן של גליה במועד הקיץ היה 0.61.

מקבלים: $0.61 = \frac{x-72}{11} \Rightarrow 6.71 = x - 72 \Rightarrow x \approx 78.71 \Rightarrow \mathbf{x = 79}$

(הציונים בבחינה הם מספרים שלמים בין 0-100)

ג. הציון של אסף בשני המועדים מקיים: $z = \frac{(\bar{x}+S)-\bar{x}}{S} = \frac{S}{S} = 1$.

אם ציון התקן היה זהה בשני המועדים , הרי שההצלחה של אסף ביחס לשאר הנבחנים הייתה **זהה** בשני המועדים.

פתרון שאלה מספר 2

א. **דיאגרמה II.** – על פי הנתונים בטבלה , ככל ש- x גדל , y לרוב קטן , לכן גרף III. לא מתאים.
הירידה איננה קבועה , לכן גרף I. לא מתאים.

ב. 1) נחשב על פי הטבלה את $\bar{x}$ ואת $\bar{y}$:

$$\bar{x}=\frac{5+7+8+10+12+15+18+20}{8}=11.875$$

$$\bar{y}=\frac{15+12+10+12+12+10+8+5}{8}=10.5$$

נציב במשוואת קו הרגרסיה $y = mx + 16.9$:

$$10.5=m\cdot 11.875+16.9\Rightarrow 11.875m=-6.4\Rightarrow \mathbf{m=-0.54}$$

2) $$m=r\cdot\frac{S_y}{S_x}\Rightarrow -0.54=r\cdot\frac{4.8}{5}\Rightarrow 0.96r=-0.54\Rightarrow \mathbf{r=-0.5625}$$

ג. נתון : $x = 9$. על פי משוואת קו הרגרסיה לניבוי y על פי x מקבלים:

$$y=-0.54\cdot 9+16.9\Rightarrow y\approx \mathbf{12\%}$$

פתרון שאלה מספר 3

א. נסמן: A – קבוצת הפלאפונים המיוצרים בחברה א' (היקרים יותר) , $\bar{A}$ - קבוצת הפלאפונים המיוצרים בחברה ב' , B – קבוצת הפלאפונים בהם התגלתה תקלה בשנה הראשונה ,
$\bar{B}$ - קבוצת הפלאפונים בהם לא התגלתה תקלה בשנה הראשונה.

נתון: $P(A) = 0.7 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0.3$, $P(B/A) = 0.1$, $P(B/\bar{A}) = 0.15$. צריך לחשב : $P(B)$

חישוב : $$P(B/A)=0.1\Rightarrow\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=0.1\Rightarrow\frac{P(B\cap A)}{0.7}=0.1\Rightarrow P(B\cap A)=0.07$$

$$P(B/\bar{A})=0.15\Rightarrow\frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=0.15\Rightarrow\frac{P(B\cap\bar{A})}{0.3}=0.15\Rightarrow(B\cap\bar{A})=0.045$$

מקבלים:

	A	$\bar{A}$	
B	0.07	0.045	0.115
$\bar{B}$	0.63	0.255	0.885
	0.7	0.3	1

קיבלנו : $P(B) = 0.115$, כלומר בקרב **11.5%** מן הפלאפונים שנבדקו התגלו בהם תקלות בשנת השימוש הראשונה

ב. צריך לחשב $P(\bar{A}/B)$. חישוב: $P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{0.045}{0.115} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{23}} = \mathbf{0.391}$

ג. $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.07}{0.115} = \frac{14}{23}$, $P(\bar{A}/B) = \frac{9}{23} \Rightarrow P(\bar{A}/B) < P(A/B) \Rightarrow$

טענה 1) איננה נכונה , כי מבין הפלאפונים בהם התגלתה תקלה בשנה הראשונה , אחוז פלאפונים היקרים היה גבוה יותר מאחוז הפלאפונים הזולים.

$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A\cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.63}{0.885} = \frac{42}{59}$, $P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.255}{0.885} = \frac{17}{59}$

$\Rightarrow P(A/\bar{B}) > P(\bar{A}/\bar{B}) \Rightarrow$ אחוז הפלאפונים שלא התגלתה בהם תקלה בשנה הראשונה גבוה יותר בקרב הפלאפונים היקרים , לכן **טענה 2) נכונה**

פתרון שאלה מספר 4

א. אלכסוני המעוין חוצים זה את זה , לכן

הנקודה $E(6;0)$ היא אמצע הקטע BD . לכן:

$$6 = \frac{x+0}{2} \Rightarrow x = 12 \Rightarrow \mathbf{B(12;4)}$$

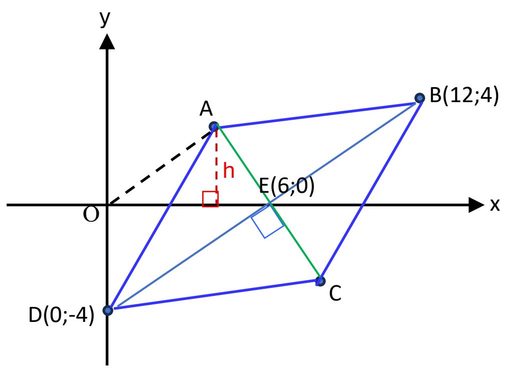
$$0 = \frac{y+4}{2} \Rightarrow y = -4 \Rightarrow \mathbf{D(0;-4)}$$

ב. אלכסוני המעוין מאונכים זה לזה , לכן: $m_{BD} \cdot m_{AC} = -1$

$$m_{BD} = \frac{4+4}{12-0} = \frac{2}{3} \Rightarrow m_{AC} = -\frac{3}{2}$$

משוואת הישר AC :

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x-6) \Rightarrow \mathbf{y = -\frac{3}{2}x + 9}$$

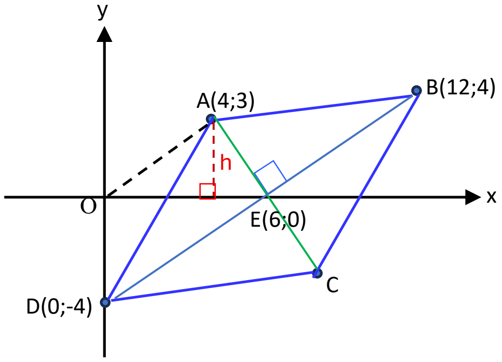


ג. 1) $S_{\Delta AOE} = 9 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot OE \cdot h = 9 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 6 \cdot h = 9 \Rightarrow h = 3$

$h = y_A = 3$. הנקודה A נמצאת על הישר $y = -\frac{3}{2}x + 9$

לכן $3 = -\frac{3}{2}x + 9 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 6 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \mathbf{A(4;3)}$. E אמצע AC לכן:

$$6=\frac{4+x_C}{2}\Rightarrow x_C=8\ ,\ 0=\frac{3+y_C}{2}\Rightarrow y_C=-3\Rightarrow \mathbf{C(8;-3)}$$



(2 $S_{OABE}=S_{\Delta OAE}+S_{\Delta ABE}\ ,\ S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot BE$

$$AE=\sqrt{(4-6)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$$

$$BE=\sqrt{(12-6)^2+(4-0)^2}=\sqrt{52}$$

$$S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}=13\Rightarrow S_{OABE}=9+13=\mathbf{22}$$

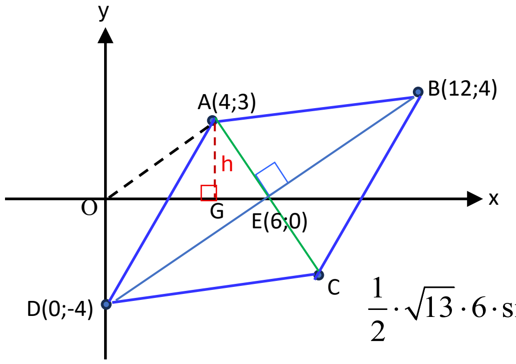
ד. 1) במשולש AEB : $\tan\sphericalangle ABE=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{52}}\Rightarrow\sphericalangle ABE=26.565^\circ$

במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות והזוויות הנגדיות שוות זו לזו, לכן

$$\sphericalangle\mathbf{ABC}=\sphericalangle\mathbf{ADC}=2\cdot 26.565^\circ=\mathbf{53.13^o}$$

סכום זוויות סמוכות במעוין הוא 180° לכן

$$\sphericalangle\mathbf{DAB}=\sphericalangle\mathbf{DCB}=180^\circ-53.13^o=\mathbf{126.87^o}$$



2) דרך 1:

$$S_{\Delta AOE}=9\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot AE\cdot OE\cdot\sin\sphericalangle AEO=9\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot 6\cdot\sin\sphericalangle AEO=9\Rightarrow\sin\sphericalangle AEO=0.832\Rightarrow\sphericalangle\mathbf{AEO=56.31^o}$$

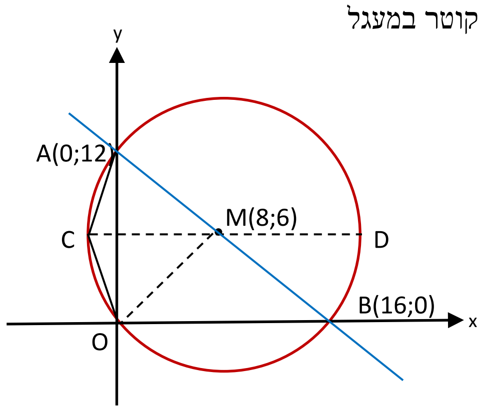
דרך 2:

נסמן ב- AG את הגובה לצלע OE במשולש OAE . $AE=\sqrt{13}\ ,\quad AG=3$.

במשולש ישר זווית AGE מקבלים:

$$\sin\sphericalangle AEO=\frac{3}{\sqrt{13}}\Rightarrow\sphericalangle\mathbf{AEO=56.31^o}$$

פתרון שאלה מספר 5



א. $AO \perp OB$ (הצירים מאונכים זה לזה) $\Leftarrow \sphericalangle AOB = 90^\circ \Leftarrow AB$ קוטר במעגל
(מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר)

ב. 1) A נקודת החיתוך של הישר $y = -\frac{3}{4}x + 12$
עם ציר ה- y לכן : $x_A = 0 \Rightarrow y_A = 12 \Rightarrow \mathbf{A(0;12)}$
B נקודת החיתוך של הישר $y = -\frac{3}{4}x + 12$
עם ציר ה- x לכן:

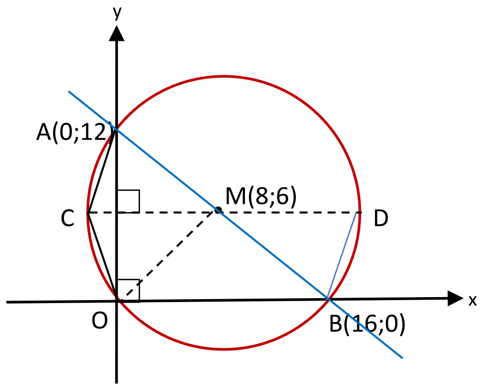
$$y_B = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{3}{4}x + 12 \Rightarrow \frac{3}{4}x = 12 \Rightarrow x_B = 16 \Rightarrow \mathbf{B(16;0)}$$

2) מרכז המעגל M הוא אמצע הקטע AB :

$$x_M = \frac{0+16}{2} = 8 \; , \; y_M = \frac{12+0}{2} = 6 \Rightarrow M(8;6)$$

$$R = \sqrt{(0-8)^2 + (12-6)^2} = 10 \;\Rightarrow$$

משוואת המעגל: $\mathbf{(x-8)^2 + (y-6)^2 = 100}$



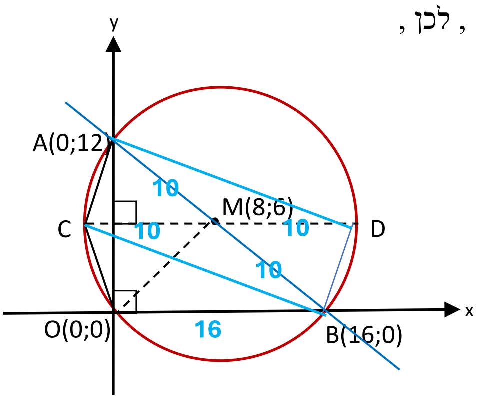
ג. 1) ציר ה- y מאונך לציר ה- x , CM מקביל לציר ה- x , לכן ציר ה- y מאונך ל- CM .
2) $MA = MO$ (רדיוסים שווים במעגל)
CM מאונך ל- AC , לכן, $\sphericalangle AMC = \sphericalangle OMC$
(הגובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים חוצה את זווית הראש)
$CM = CM$ (צלע משותפת) $\Delta MAC \cong \Delta MOC$ (משפט חפיפה: צלע , זווית , צלע)
3) $MA = MO$ (רדיוסים שווים במעגל)
$CA = CO$ (צלעות מתאימות שוות במשולשים חופפים)
$\Leftarrow$ ACOM דלתון (מרובע בעל שני זוגות נפרדים של צלעות סמוכות שווה הוא דלתון)
4) אלכסוני הדלתון מאונכים זה לזה לכן : $S_{ACOM} = \frac{AO \cdot CM}{2} = \frac{12 \cdot 10}{2} = \mathbf{60}$

ד. (1) **נכון**-
$CM = MD$, $AM = MB$ (רדיוסים שווים) , $\sphericalangle AMC = \sphericalangle DMB$ (זוויות קודקודיות
שוות זו לזו) $\Leftarrow \Delta MCA \cong \Delta MDB$ לפי משפט חפיפה: צלע , זווית , צלע

(2) **לא נכון**-

$CD \parallel AB$, $OB = 16 , CD = 2R = 20 \Leftarrow CD \neq AB$, לכן ,

המרובע OCDB איננו מקבילית.



(3) **נכון** -

$AM = MB = CM = MD = 10$ (רדיוסים שווים)

לכן אלכסוני המרובע ADBC חוצים זה את זה

ושווים זה לזה , לכן המרובע הוא מלבן.

ה. 1) הנקודות C ו- D הן נקודות החיתוך של המעגל

עם הישר $y = 6$, לכן:

$$(x-8)^2+(6-6)^2=100 \Rightarrow (x-8)^2=100 \Rightarrow x-8=\pm 10$$

מתקבלות הנקודות : **D(18;6) , C(-2;6)**

2) $CD = 20$, $OB = 16$, $OC=\sqrt{(-2-0)^2+(6-0)^2}=2\sqrt{10}$,

$$DB=\sqrt{(18-16)^2+(6-0)^2}=2\sqrt{10} \Rightarrow P_{OCDB}=36+4\sqrt{10}=\mathbf{48.65}$$

פתרון שאלה מספר 6

א. נתון : ערך הנגזרת של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x-5}{a-x^2}$ בנקודה שבה $x=0$ הוא $\frac{1}{9}$,

כלומר $f'(0)=\frac{1}{9}$. לכן : $f'(x)=\frac{1(a-x^2)-(x-5)\cdot(-2x)}{(a-x^2)^2}=\frac{a-x^2+2x(x-5)}{(a-x^2)^2}=$

$$=\frac{a-x^2+2x^2-10x}{(a-x^2)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-10x+a}{(a-x^2)^2} \Rightarrow f'(0)=\frac{0^2-10\cdot 0+a}{(a-0^2)^2}=\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}$$

מקבלים: $\frac{1}{a}=\frac{1}{9} \Rightarrow$ **a = 9**

ב. $f(x)=\frac{x-5}{9-x^2}$, $f'(x)=\frac{x^2-10x+9}{(9-x^2)^2}$

1) תחום ההגדרה של הפונקציה f(x) :

$$9-x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq \pm 3 \Rightarrow \mathbf{x<-3 , -3<x<3 , 3<x}$$

2) אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x: **x = 3 , x = - 3**

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y: $\mathbf{y = 0}$

3) חיתוך עם ציר ה- y : $f(0) = \frac{0-5}{9-0^2} = -\frac{5}{9} \Rightarrow \mathbf{(0;-\frac{5}{9})}$

חיתוך עם ציר ה- x : $0 = \frac{x-5}{9-x^2} \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow \mathbf{(5;0)}$

4) נקודות קיצון: $f'(x) = \frac{x^2-10x+9}{(9-x^2)^2} = 0 \Rightarrow x^2-10x+9=0 \Rightarrow x=9 , x=1$

x	x <	-3	< x <	1	< x <	3	< x <	9	< x
f '(x)	+		+	0	-		-	0	+
f(x)	↗		↗	Max	↘		↘	min	↗

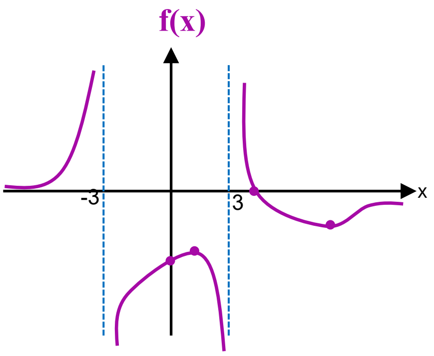
$f(1) = \frac{1-5}{9-1^2} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$, $f(9) = \frac{9-5}{9-9^2} = \frac{4}{-72} = -\frac{1}{18}$

מתקבלות הנקודות **מקסימום** $\mathbf{(1;-\frac{1}{2})}$, **מינימום** $\mathbf{(9;-\frac{1}{18})}$

5) **תחומי עלייה:** $\mathbf{x < -3 , -3 < x < 1 , x > 9}$

תחומי ירידה: $\mathbf{1 < x < 3 , 3 < x < 9}$

ג.



ד. גרף הפונקציה $g(x) = f(x+5)$ הוא הזזה אופקית של גרף הפונקציה $f(x)$ ב- 5 יחידות שמאלה , לכן :

1) האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x

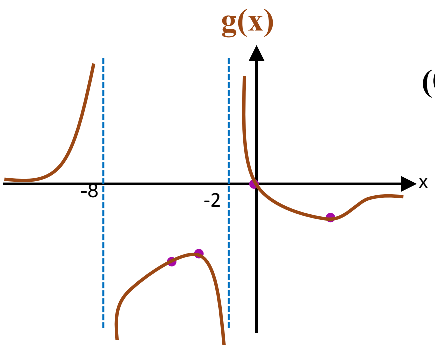
זזות ב- 5 יחידות שמאלה : $\mathbf{x = -2}$, $\mathbf{x = -8}$

האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y לא משתנה: $\mathbf{y = 0}$

2) נקודת החיתוך עם ציר ה- x זזה 5 יחידות שמאלה: $\mathbf{(0;0)}$

3) שיעורי ה- x של נקודות הקיצון זזים 5 יחידות שמאלה ושיעורי ה- y לא משתנים:

מקסימום $\mathbf{(-4;-\frac{1}{2})}$, **מינימום** $\mathbf{(4;-\frac{1}{18})}$



פתרון שאלה מספר 7

א. תחום ההגדרה: $18-3x\ge 0 \Rightarrow 18\ge 3x \Rightarrow 3x\le 18 \Rightarrow \mathbf{x\le 6}$

ב. $f(x) = x - 6 + 2\sqrt{18-3x} \Rightarrow f'(x) = 1 + 2\cdot\frac{-3}{2\sqrt{18-3x}} = 1 - \frac{3}{\sqrt{18-3x}} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{3}{\sqrt{18-3x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{18-3x} = 3 \Rightarrow 18-3x = 9 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

x	$x<3$	3	$<x<$	6	$<x$
$f'(x)$	$+$	0	-		
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	

$$f(3) = 3 - 6 + 2\sqrt{18-3\cdot 3} = 3\ ,\ \ f(6) = 6 - 6 + 2\sqrt{18-3\cdot 6} = 0$$

מתקבלות הנקודות: **(3;3) מקסימום , (6;0) מינימום**

ג. עם ציר ה- y : $f(0) = 0 - 6 + 2\sqrt{18-3\cdot 0} = 2.485 \Rightarrow \mathbf{(0;2.485)}$

עם ציר ה- x : $f(x) = 0 \Rightarrow x - 6 + 2\sqrt{18-3x} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{18-3x} = 6-x \Rightarrow$

$$\left(2\sqrt{18-3x}\right)^2 = (6-x)^2 \Rightarrow 4(18-3x) = 36-12x+x^2 \Rightarrow 72-12x = 36-12x+x^2 \Rightarrow$$

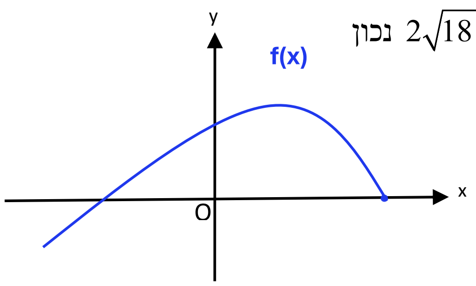
$x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$.

בדיקה : עבור $x = 6$ מקבלים $2\sqrt{18-3\cdot 6} = 6-6 \Rightarrow 0 = 0$ נכון (התקבל קודם)

עבור $x = -6$ מקבלים $2\sqrt{18-3\cdot(-6)} = 6-(-6) \Rightarrow 12 = 12$ נכון

$\Rightarrow \mathbf{(6;0), (-6;0)}$

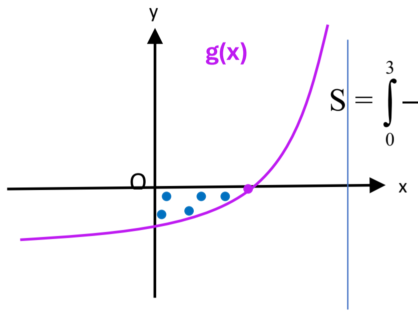
ד.



ה. גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר ה- x רק בנקודה (3;0) . הפונקציה חיובית בתחום $x<3$ ושלילית בתחום $3<x<6$ (על פי תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$) לכן , הגרף המתאים הוא **גרף I.**

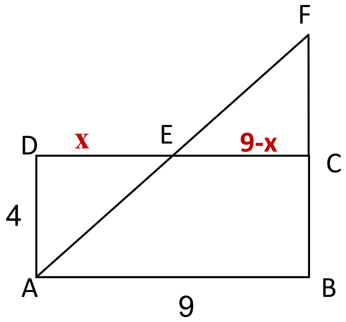
ו. גרף הפונקציה $g(x) = -f'(x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $f'(x)$ ביחס לציר ה- x :

חישוב השטח המבוקש :



$$S = \int_0^3 -g(x)dx = \int_0^3 f'(x)dx = [f(x)]_0^3 = f(3) - f(0) = 3 - 2.485 = \mathbf{0.515}$$

פתרון שאלה מספר 8



א. $DE = x\ ,\ DC = 9 \Rightarrow EC = 9 - x$

ABCD מלבן, לכן: $\sphericalangle D = \sphericalangle B = 90^\circ$,

$DC \parallel AB\ ,\ \sphericalangle B = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle FCD = \sphericalangle B = 90^\circ$

$\sphericalangle FEC = \sphericalangle DEA$ (זוויות קודקודיות שוות זו לזו)

$\Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta DEA$ (משפט דמיון זווית, זווית)

$$\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{EF}{EA} = \frac{CF}{DA} \Rightarrow \frac{9-x}{x} = \frac{CF}{4} \Rightarrow x \cdot CF = 4 \cdot (9-x) \Rightarrow \mathbf{CF = \frac{4(9-x)}{x}}$$

ב. פונקציית המטרה:

$$f(x) = S_{\Delta EFC} + S_{\Delta EAD} = \frac{1}{2} \cdot FC \cdot EC + \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot \frac{4(9-x)}{x} \cdot (9-x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot 4 \Rightarrow$$

$$= \frac{2(9-x)^2}{x} + 2x = \frac{2(81-18x+x^2)}{x} + 2x =$$

$$= \frac{162-36x+2x^2}{x} + 2x = \frac{162-36x+2x^2+2x^2}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{4x^2-36x+162}{x}$$

תחום ההגדרה של הפונקציה: $0 < x < 9$

$$f'(x) = \frac{(8x-36) \cdot x - (4x^2-36x+162)}{x^2} = \frac{8x^2-36x-4x^2+36x-162}{x^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{4x^2-162}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2-162 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 162 \Rightarrow$$

$$x^2 = 40.5 \Rightarrow x = \sqrt{40.5} = 6.36$$

x	0	$< x <$	6.36	$< x <$	9
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	min	↗	

מסקנה: סכום שטחי המשולשים EFC ו-EAD הוא מינימלי עבור $\mathbf{x = \sqrt{40.5} = 6.36}$