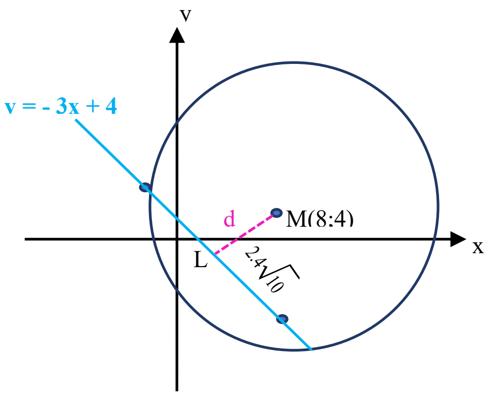
מבחן מס' 1

פתרון שאלה מס' 1



א. האנך ממרכז המעגל למיתר (ML בציור) חוצה את המיתר. נחשב את אורך האנך, כלומר, את מרחק מרכז המעגל $M(8;4)$ מן הישר $3x + y - 4 = 0$:

$d = \frac{|3\cdot 8 + 4 - 4|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{24}{\sqrt{10}} = 2.4\sqrt{10}$. נחשב את

רדיוס המעגל בעזרת משפט פיתגורס:

$R = \sqrt{\left(2.4\sqrt{10}\right)^2 + \left(2.4\sqrt{10}\right)^2} = \frac{24\sqrt{5}}{5}$.

משוואת מעגל M: $\mathbf{(x-8)^2 + (y-4)^2 = 115.2}$

ב.1) אם המעגלים נחתכים, אז אורך קטע המרכזים MN קטן מסכום הרדיוסים וגדול מהפרש.

מקבלים: $M(8;4)$, $N(-2m;-n)$

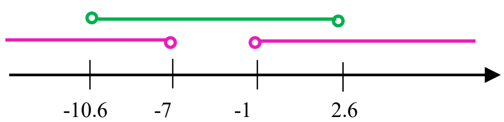
$\Leftarrow \frac{24\sqrt{5}}{5} - \sqrt{16.2} < \sqrt{(8+2m)^2 + (4+m)^2} < \frac{24\sqrt{5}}{5} + \sqrt{16.2}$

$\Leftarrow \frac{33\sqrt{5}}{5} < \sqrt{5m^2+40m+80} < 3\sqrt{5} \Leftarrow 217.8 > 5m^2+40m+80 > 45 \Leftarrow$

$5m^2+40m+35 > 0$ וגם $5m^2+40m-137.8 < 0$.

מקבלים: $(m > -1$ או $m < -7)$ וגם $(-10.6 < m < 2.6)$ $\Leftarrow$

$\mathbf{-10.6 < m < -7}$ **או** $\mathbf{-1 < m < 2.6}$

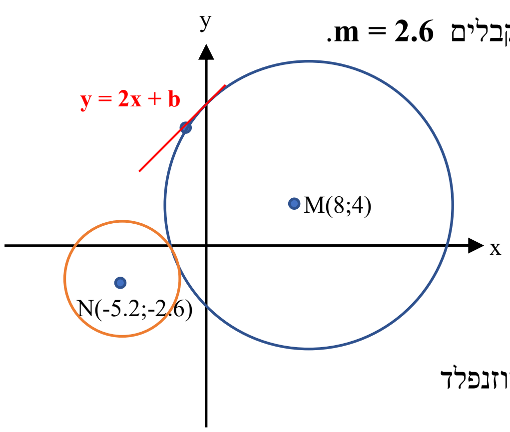


2) המעגלים משיקים מבחוץ לכן $MN = R_1 + R_2 = \frac{33\sqrt{5}}{5}$

מקבלים:

$\frac{33\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5m^2+40m+80} \Leftarrow 5m^2+40m-137.8 = 0 \Leftarrow m = -10.6$, $m = 2.6$.

שיעורי מרכז המעגל N הם $(-2m;-m)$, N ברביע השלישי לכן מקבלים $\mathbf{m = 2.6}$.



ג. 1) משוואת המעגל N: $(x+5.2)^2 + (y+2.6)^2 = 16.2$.

הישר $y = 2x + b$ ששיפועו 2 משיק למעגל M לכן מרחקו

מן הנקודה M הוא $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ (רדיוס המעגל M). מקבלים:

$$\frac{24\sqrt{5}}{5}=\frac{|2\cdot 8-4+b|}{\sqrt{2^2+1^2}}\Rightarrow\frac{|12+b|}{\sqrt{5}}=\frac{24}{\sqrt{5}}\Rightarrow$$

$12+b=-24\Rightarrow b=-36$ או $12+b=24\Rightarrow b=12$

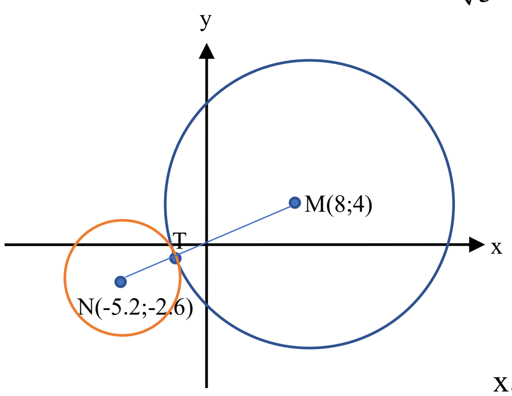
הישר $y = 2x - 36$ משיק למעגל בנקודה שנמצאת ברביע הרביעי

לכן הפתרון הוא $\mathbf{y = 2x+12}$.

2) נחשב את מרחק הישר $y = 2x + 12$ ממרכז המעגל $N(-5.2;-2.6)$:

$$d=\frac{|2\cdot(-5.2)+2.6+12|}{\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{21\sqrt{5}}{25}\neq\sqrt{16.2}\Rightarrow$$ הישר **אינו משיק** למעגל N

3) $\frac{R_1}{R_2}=\frac{\frac{24\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{16.2}}=\mathbf{\frac{8}{3}}$



4) קטע המרכזים MN עובר דרך נקודת ההשקה (הנקודה T בציור)

נמצא בסעיף הקודם : $\frac{MT}{TN}=\frac{8}{3}\Rightarrow$

$$x_T=\frac{8\cdot 3+(-5.2)\cdot 8}{11}=-1.6\ ,\ y_T=\frac{4\cdot 3+(-2.6)\cdot 8}{11}=-0.8$$

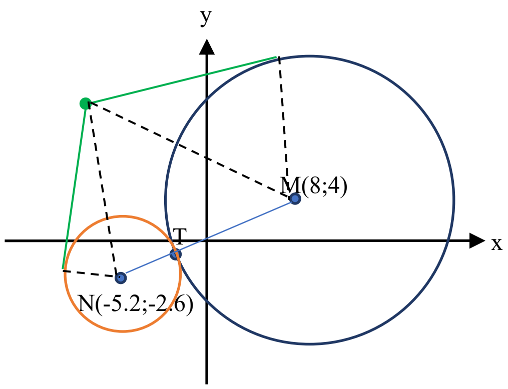
מתקבלת הנקודה **T(-1.6;-0.8)**

ד. 1) נסמן ב- P(x;y) נקודה כללית על המקום הגיאומטרי.

אורך המשיק מנקודה זו למעגל M הוא:

$\sqrt{(x-8)^2+(y-4)^2-115.2}$ ואורך המשיק למעגל N הוא:

$\sqrt{(x+5.2)^2+(y+2.6)^2-16.2}$. המשיקים שווים לכן:



$$(x-8)^2+(y-4)^2-115.2=(x+5.2)^2+(y+2.6)^2-16.2$$

$$x^2-16x+64+y^2-8y+16-115.2=$$

$$x^2+10.4x+27.04+y^2+5.2y+6.76-16.2$$

$\mathbf{y = - 2x - 4} \Leftarrow 26.4x + 13.2y = -52.8$

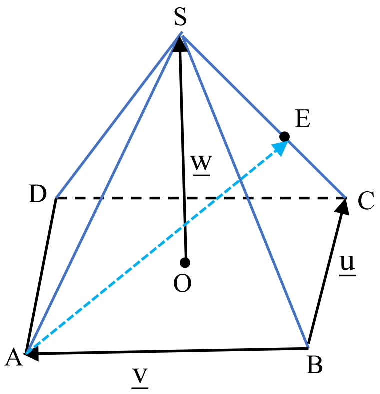
2) המשיק המשותף בנקודה T מאונך לקטע המרכזים MN , לכן:

שיפוע המשיק המשותף הוא 2 - $\Leftarrow m_{MN}=\frac{4+2.6}{8+5.2}=\frac{1}{2}$.

משוואת המשיק בנקודה $T(-1.6;-0.8)$: $y + 0.8 = -2(x + 1.6) \Rightarrow y = -2x - 4 \Rightarrow$

כן , הישרים מתלכדים .

פתרון שאלה מס' 2



א. $\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}(\underline{v}+\underline{u})+\underline{w}\Rightarrow$

$$\mathbf{\overrightarrow{BS}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}=-\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{w}\Rightarrow\mathbf{\overrightarrow{AS}=\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{w}}$$

ב. נתון: $|\underline{v}|=10$, $|\underline{u}|=8$, $\underline{v}\cdot\underline{u}=0\Leftarrow\underline{v}\perp\underline{u}$. בפירמידה ישרה שבסיסה מלבן , O מרכז המעגל החוסם את המלבן , לכן SO מאונך למישור המלבן ולכן מאונך לכל וקטור במישור המלבן. מקבלים: $\underline{w}\cdot\underline{u}=0$, $\underline{w}\cdot\underline{v}=0$. לכן , עבור $\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{BS}$:

$$\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BS}=0\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{w}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{w}\right)=0\Rightarrow\frac{1}{4}|\underline{u}|^2-\frac{1}{4}|\underline{v}|^2+|\underline{w}|^2=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}\cdot 64-\frac{1}{4}\cdot 100+|\underline{w}|^2=0\Rightarrow|\underline{w}|^2=9\Rightarrow\mathbf{|\underline{w}|=3}$$

ג. (1 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SE}=\overrightarrow{AS}+\frac{3}{5}\overrightarrow{SC}=\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{w}+\frac{3}{5}(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC})=$

$$=\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{w}+\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}-\underline{w}+\underline{u}\right)=\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{w}+\frac{3}{10}\underline{u}-\frac{3}{10}\underline{v}-\frac{3}{5}\underline{w}\Rightarrow$$

$$\mathbf{\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\underline{u}-\frac{4}{5}\underline{v}+\frac{2}{5}\underline{w}}$$

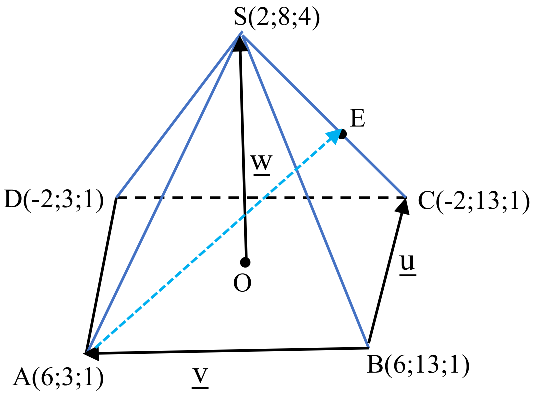
(2 $\cos\measuredangle SAE=\frac{\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AS}|\cdot|\overrightarrow{AE}|}$.

$$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{w}\Rightarrow|\overrightarrow{AS}|=\sqrt{\frac{1}{4}|\underline{u}|^2+\frac{1}{4}|\underline{v}|^2+|\underline{w}|^2}=\sqrt{16+25+9}=5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\underline{u}-\frac{4}{5}\underline{v}+\frac{2}{5}\underline{w}\Rightarrow|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{\frac{16}{25}|\underline{u}|^2+\frac{16}{25}|\underline{v}|^2+\frac{4}{25}|\underline{w}|^2}=\frac{2\sqrt{665}}{5}$$

$$\cos\measuredangle SAE=\frac{\left(\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}+\underline{w}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\underline{u}-\frac{4}{5}\underline{v}+\frac{2}{5}\underline{w}\right)}{5\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{665}}{5}}=\frac{25.6+40+3.6}{2\sqrt{1330}}=0.9487$$

$$\Rightarrow\mathbf{\measuredangle SAE=18.42^{\circ}}$$



ד. 1) $\underline{v} = (0;-10;0) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (0;-10;0) \Rightarrow$

$6-x_B=0, 3-y_B=-10, 1-z_B=0 \Rightarrow \mathbf{B(6;13;1)}$

$\underline{u} = \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(-2-6;3-3;1-1)=(-8;0;0)\Rightarrow$

$x_C-6=-8\ ,\ y_C-13=0\ ,\ z_C-1=0 \Rightarrow \mathbf{C(-2;13;1)}$

$\frac{SE}{EC}=\frac{3}{2}\Rightarrow x_E=\frac{2\cdot2+(-2)\cdot3}{5}=-0.4$

$y_E=\frac{8\cdot2+13\cdot3}{5}=11, z_E=\frac{4\cdot2+1\cdot3}{5}=2.2\Rightarrow \mathbf{E(-0.4;11;2.2)}$

(אפשר גם על-ידי הצבת הווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ בווקטור $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\underline{u}-\frac{4}{5}\underline{v}+\frac{2}{5}\underline{w}$ ומציאת הנקודה E בעזרת הנקודה A)

2) $\overrightarrow{AS}=(2-6;8-3;4-1)=(-4;5;3)\ ,\ \overrightarrow{BS}=(2-6;8-13;4-1)=(-4;-5;3)$

$\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BS}=(-4;5;3)\cdot(-4;-5;3)=16-25+9=0\Rightarrow \overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{BS}$

3) נמצא את הווקטור (a;b;c) המאונך למישור SAB :

$(a;b;c)\cdot(-4;5;3)=0\Rightarrow -4a+5b+3c=0$

$(a;b;c)\cdot(-4;-5;3)=0\Rightarrow -4a-5b+3c=0$

$\Rightarrow -8a+6c=0\Rightarrow 4a=3c$

נבחר $c=4$ ונקבל $a=3$ $\Leftarrow -4\cdot3+5b+3\cdot4=0\Leftarrow b=0\Leftarrow$ מתקבלת המשוואה:

$3x+4z+d=0$. נציב את שיעורי הנקודה A ונקבל $3\cdot6+4\cdot1+d=0\Rightarrow d=-22$

משוואת מישור המשולש SAB : $\mathbf{3x+4z-22=0}$

4) נפח הפירמידה ESAB : $V=\frac{S_{\Delta SAB}\cdot h}{3}$.

$SA\perp SB\Rightarrow S_{\Delta SAB}=\frac{SA\cdot SB}{2}=\frac{\left(\sqrt{16+25+9}\right)^2}{2}=25$

גובה הפירמידה הוא מרחק הנקודה E מן המישור SAB :

$V=\frac{25\cdot2.88}{3}=\mathbf{24}\Leftarrow \quad h=\frac{|3\cdot(-0.4)+4\cdot2.2-22|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{14.4}{5}=2.88$

ה. 1) נמצא את הווקטור (a;b;c) המאונך למישור SDB :

$\overrightarrow{SD}=(-2-2;3-8;1-4)=(-4;-5;-3)=-(4;5;3)\ ,\ \overrightarrow{BS}=(-4;-5;3)$

$(a;b;c)\cdot(4;5;3)=0\Rightarrow 4a+5b+3c=0$

$(a;b;c)\cdot(-4;-5;3)=0\Rightarrow -4a-5b+3c=0$

$\Rightarrow\ 6c = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow 4a + 5b = 0 \Rightarrow 4a = -5b$

נבחר $b = -4$ ונקבל $a = 5$ מתקבלת המשוואה:

$5x - 4y + d = 0$. נציב את שיעורי הנקודה S ונקבל $5 \cdot 2 - 4 \cdot 8 + d = 0 \Rightarrow d = 22$

משוואת מישור המשולש SDB : $\mathbf{5x - 4y + 22 = 0}$

2) הזווית α בין מישור המשולש SDB והישר AE:

הווקטור האנך למישור SDB הוא הווקטור $(5;-4;0)$. ווקטור הכיוון של הישר AE הוא

$\overrightarrow{AE} = (-0.4 - 6; 11 - 3; 2.2 - 1) = (-6.4; 8; 1.2)$.

מקבלים: $\sin\alpha = \dfrac{|(5;-4;0) \cdot (-6.4;8;1.2)|}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{106.4}} = 0.969 \Rightarrow \alpha = \mathbf{75.69^o}$

3) ההצגה הפרמטרית של ישר החיתוך של המישורים $3x + 4z - 22 = 0$ ו- $5x - 4y + 22 = 0$:

$5x - 4y + 22 = 0 \Rightarrow x = -4.4 + \dfrac{4y}{5}$. נסמן: $y = 5t$ ונקבל $x = -4.4 + 4t$

נציב במשוואה $3x + 4z - 22 = 0$ ונקבל

$3(-4.4 + 4t) + 4z - 22 = 0 \Rightarrow 4z = 35.2 - 12t \Rightarrow z = 8.8 - 3t$.

נקודה אופיינית על ישר החיתוך היא: $(x;y;z) = (-4.4 + 4t \,;\, 5t \,;\, 8.8 - 3t)$

מקבלים: $\mathbf{\underline{x} = (-4.4;0;8.8) + t(4;5;-3)}$

הערה: ישר החיתוך של המישורים SAB ו- SDB הוא הישר SB שאחת ההצגות הפרמטריות שלו ,
על פי שיעורי הנקודות $S(2;8;4)$ ו- $B(6;13;1)$ היא:

$\overrightarrow{SB} = (4;5;-3) \Rightarrow \underline{x} = (2;8;4) + t(4;5;-3)$

פתרון שאלה מס' 3

א. נסמן : $z \neq 2i$, $w=\dfrac{z+4i}{z-2i}$ ונמצא את פתרונות המשוואה $w^4=1$:

$$w^4=\text{cis}360^\circ k \Rightarrow w_k=\text{cis}\frac{360^\circ k}{4}=\text{cis}90^\circ k$$

מתקבלים הפתרונות:

$$w_0=\text{cis}0^\circ=1\ ,\ w_1=\text{cis}90^\circ=i\ ,\ w_2=\text{cis}180^\circ=-1\ ,\ w_3=\text{cis}270^\circ=-i$$

לכן: I. $\dfrac{z+4i}{z-2i}=1 \Rightarrow z+4i=z-2i \Rightarrow$ אין פתרון

II. $\dfrac{z+4i}{z-2i}=i \Rightarrow z+4i=zi+2 \Rightarrow z-zi=2-4i \Rightarrow z(1-i)=2-4i \Rightarrow$

$$\Rightarrow z(1-i)=2-4i \Rightarrow z=\frac{2-4i}{1-i}=\frac{(2-4i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}=$$

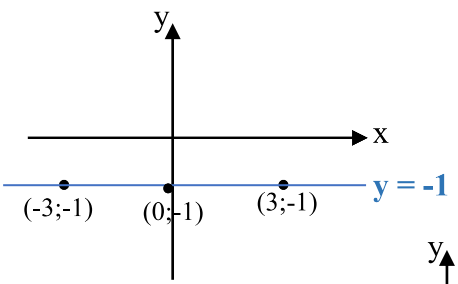
$$\frac{2-4i+2i+4}{2} \Rightarrow \mathbf{z_1=3-i}$$

III. $\dfrac{z+4i}{z-2i}=-1 \Rightarrow z+4i=-z+2i \Rightarrow 2z=-2i \Rightarrow \mathbf{z_2=-i}$

IV. $\dfrac{z+4i}{z-2i}=-i \Rightarrow z+4i=-zi-2 \Rightarrow z+zi=-2-4i \Rightarrow z(1+i)=-2-4i \Rightarrow$

$$\Rightarrow z(1+i)=-2-4i \Rightarrow z=\frac{-2-4i}{1+i}=\frac{(-2-4i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=$$

$$\frac{-2-4i+2i-4}{2} \Rightarrow \mathbf{z_3=-3-i}$$



ב. הנקודות במישור של גאוס המתאימות לפתרונות

$z_1=3-i$, $z_2=-i$, $z_3=-3-i$, הן הנקודות

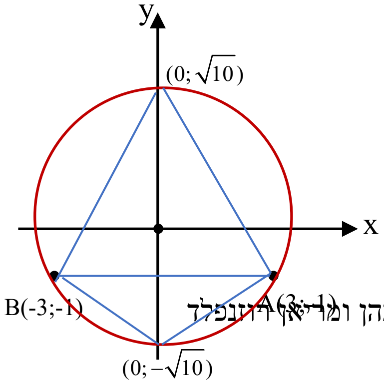
$(3;-1)$, $(0;-1)$, $(-3;-1)$ שנמצאות בהתאמה על הישר $y=-1$.

ג. 1) אלכסוני הדלתון מאונכים זה לזה . האלכסון AB

מקביל לציר ה- x . ציר ה- y מאונך ל- AB

וחוצה אותו, לכן , שני הקודקודים האחרים

של הדלתון נמצאים בנקודות החיתוך של



המעגל עם ציר ה- y :

רדיוס המעגל $R=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

שני הקודקודים נמצאים בנקודות $(0;\sqrt{10})$

ו- $(0;-\sqrt{10})$ המתאימות בהתאמה , למספרים $\mathbf{z=\sqrt{10}\cdot i}$ ו- $\mathbf{z=-\sqrt{10}\cdot i}$.

2) שטח הדלתון שווה למחצית מכפלת אלכסוניו: $S=\dfrac{6\cdot2\sqrt{10}}{2}=\mathbf{6\sqrt{10}}$

פתרון שאלה מס' 4

א. $f(x)=(x-a)e^x\Rightarrow f'(x)=e^x+(x-a)e^x=e^x(1+x-a)\Rightarrow f'(x)=e^x(x-a+1)$

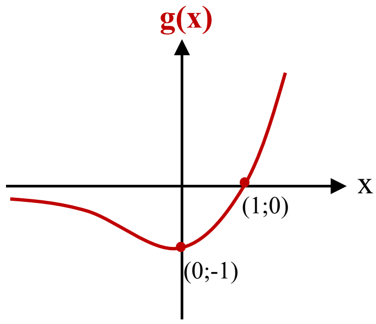
ב. 1) חיתוך עם ציר ה- x : $(x-1)e^x=0\Rightarrow x=1\Rightarrow \mathbf{(1;0)}$

חיתוך עם ציר ה- y : $g(0)=-1\Rightarrow \mathbf{(0;-1)}$

2) אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y $x\to\infty\Rightarrow g(x)\to\infty\ ,\ x\to-\infty\Rightarrow g(x)\to0\Rightarrow \mathbf{y=0}$

3) על פי סעיף א': $g'(x)=(x-1+1)e^x=xe^x=0\Rightarrow x=0$

x	$<x$	0	$<x$
g'(x)	-	0	+
g(x)	↘	מינימום	↗



4) הנקודה **(0;-1) היא נקודת מינימום** של הפונקציה g(x)

ג. הפונקציה h(x) היא הפונקציה הקדומה של הפונקציה g(x).

על פי סעיף א' , הפונקציה הקדומה לפונקציה $f'(x)=(x-a+1)e^x$

היא הפונקציה $f(x)=(x-a)e^x+c$. לכן , הפונקציה הקדומה של

הפונקציה $g(x)=(x-1)e^x$ היא הפונקציה $h(x)=(x-2)e^x+c$.

אסימפטוטה לגרף הפונקציה h(x) המאונכת לציר ה- y :

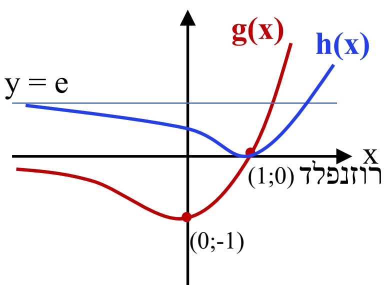
$x\to\infty\Rightarrow h(x)\to\infty\ ,\ x\to-\infty\Rightarrow h(x)\to c\Rightarrow c=e$

מקבלים: $\mathbf{h(x)=(x-2)e^x+e}$

ד. 1) על פי נקודת האפס , תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית הנגזרת $h'(x)=g(x)$ מקבלים:

לפונקציה h(x) יש נקודת מינימום בנקודה שבה $x=1$, $h(1)=-e+e=0$ לכן :

(1;0) היא נקודת מינימום של h(x) .   (2



ה. (1 תחום ההגדרה: $h(x) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x \neq 1}$

(2 על פי תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות

$g(x)$ ו- $h(x)$: **הפונקציה $k(x)$ חיובית בתחום $x > 1$**

ושלילית בתחום $x < 1$

ו. נתון: $m'(x) = k(x)$ לכן : $m(x) = \int k(x)dx = \int \frac{g(x)}{h(x)}dx = \int \frac{h'(x)}{h(x)}dx = \ln|h(x)| + c$

הפונקציה $h(x)$ חיובית בתחום $x > 1$ לכן מקבלים: $m(x) = \ln\left[(x - 2)e^x + e\right] + c$

נתון: $m(2) = 1 \Leftarrow 1 = \ln\left[(2 - 2)e^x + e\right] + c \Leftarrow 1 = \ln e + c \Leftarrow c = 0$.

מקבלים: $\mathbf{m(x) = \ln\left[(x - 2)e^x + e\right]}$

פתרון שאלה מס' 5

א. (1 תחום ההגדרה של הפונקציה $f'(x) = \frac{2a \cdot \ln x + 2a}{x}$ הוא : $\mathbf{x > 0}$.

אסימפטוטות מאונכות לצירים:

אסימפטוטה $\mathbf{x = 0} \Leftarrow x \to 0^+ \Rightarrow f'(x) \to -\infty$

אסימפטוטה $\mathbf{y = 0} \Leftarrow x \to \infty \Rightarrow f'(x) \to 0$

נקודות חיתוך עם הצירים: $x > 0$ לכן אין חיתוך עם ציר ה- y . עם ציר ה- x :

$$\frac{2a \cdot \ln x + 2a}{x} = 0 \Rightarrow 2a \cdot \ln x + 2a = 0 \Rightarrow 2a(\ln x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \left(\mathbf{\frac{1}{e};0}\right)$$

נקודות קיצון: $f'(x) = \frac{2a \cdot \ln x + 2a}{x} \Rightarrow f''(x) = \frac{2a \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (2a \cdot \ln x + 2a)}{x^2} =$

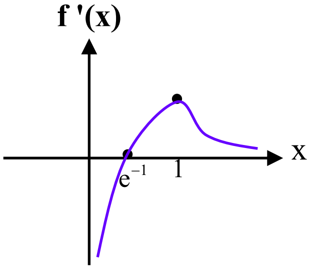
$$= \frac{2a - 2a \cdot \ln x - 2a}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2a \cdot \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$f'(1) = \frac{2a \cdot 0 + 2a}{1} = 2a$.

x	0	x <	1	< x
f''(x)		+	0	-
f'(x)		↗	מקסימום	↘

מקבלים: **(1;2a) נקודת מקסימום**

(2



ב. המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(1;3)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 1$, לכן , המשיק עובר בנקודות $(1;3)$ ו- $(0;1)$ ולכן שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(1;3)$ הוא :

$\frac{3-1}{1-0}=2 \Rightarrow f'(1)=2$. מצאנו בסעיף הקודם כי $f'(1)=2a \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{2\cdot \ln x+2}{x} \Rightarrow f(x)=\int \frac{2\cdot \ln x+2}{x}dx=\int\left(\frac{2}{x}\cdot \ln x+\frac{2}{x}\right)dx=$$

$$\int\left(\frac{1}{x}\cdot 2\ln x+\frac{2}{x}\right)dx \Rightarrow f(x)=\ln^2 x+2\ln x+c.$$

גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(1;3)$ לכן :

$$3=(\ln 1)^2+2\ln 1+c \Rightarrow c=3 \Rightarrow \mathbf{f(x)=\ln^2x+2\ln x+3}$$

ג. 1) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x>0$. מצאנו:

$f'(\frac{1}{e})=0$, $f'(x)<0$ בתחום $0<x<\frac{1}{e}$ ו- $f'(x)>0$ בתחום $x>\frac{1}{e}$

לכן , לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום בנקודה שבה $x=\frac{1}{e}$.

$f(\frac{1}{e})=2 \Rightarrow \left(\frac{1}{e};2\right)$ **נקודת מינימום** של $f(x)$

2) $f'(x)$ עולה בתחום $0<x<1$ לכן $f''(x)>0$ ולכן

$f(x)$ קעורה כלפי מעלה בתחום $0<x<1$

$f'(x)$ יורדת בתחום $x>1$ לכן $f''(x)<0$ ולכן

$f(x)$ קעורה כלפי מטה בתחום $x>1$.

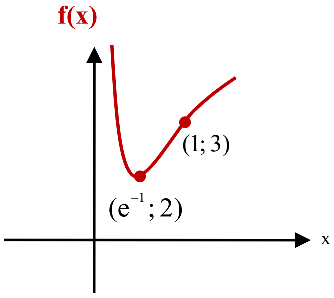
מקבלים : **הנקודה $(1;3)$ נקודת פיתול של $f(x)$**

3) לא , כי: עבור $a=1$, הנקודה $(1;2)$ היא המקסימום

המוחלט של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, לכן, השיפוע המקסימלי

של משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא 2.

ד.



ה. הערך המינימלי של הפונקציה $f(x)$ הוא $f(x)=2$.

לכן , עבור כל ערך של x בו הפונקציה $f(x)$ מוגדרת

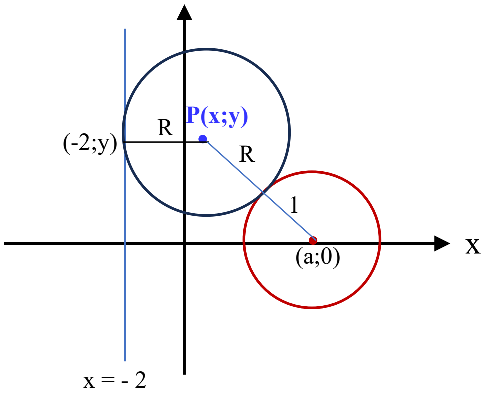
מתקיים: $f(x)\geq 2 \Rightarrow \ln^2x+2\ln x+3\geq 2 \Rightarrow \ln^2x+2\ln x\geq -1$

ו. $g(x)=k\cdot f'(x) \Rightarrow \int_{e^{-1}}^{e} k\cdot f'(x)dx=$

$$\left[k\cdot f(x)\right]_{e^{-1}}^{e}=k\cdot(6-2)=4k \Rightarrow 4k=1 \Rightarrow \mathbf{k=\frac{1}{4}}$$

מבחן מס' 2

פתרון שאלה מס' 1



א. 1) נסמן נקודה כללית על המקום הגיאומטרי המבוקש ב- $P(x;y)$.

המעגל שמרכזו P משיק לישר $x = -2$ לכן מרחק הנקודה P מן הישר שווה לרדיוס R של המעגל P. המעגל משיק מבחוץ למעגל הנתון שמרכזו $(a;0)$ ורדיוסו 1 , לכן מרחק הנקודה P מן הנקודה $(a;0)$ שווה לסכום הרדיוסים של שני המעגלים.

מקבלים: $\sqrt{(x-a)^2+y^2} = R+1$, $R = |x+2|$.

$x > -2$ לכן $R = x + 2$. מקבלים:

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2} = x+3 \Rightarrow (x-a)^2+y^2 = x^2+6x+9 \Rightarrow$$

$$(x-a)^2+y^2 = x^2+6x+9 \Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2 = x^2+6x+9 \Rightarrow$$

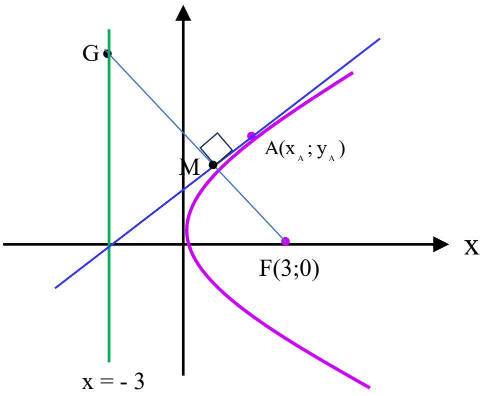
$$\mathbf{y^2 = (2a+6)x+9-a^2}$$

2) הנקודה $(0;0)$ מקיימת את המשוואה $y^2 = (2a+6)x+9-a^2$ לכן מתקיים :

$$0 = (2a+6)\cdot 0+9-a^2 \Rightarrow 9 = a^2 \Rightarrow a = \pm 3 \text{ , } a > 1 \Rightarrow a = 3$$

נציב במשוואת המקום הגיאומטרי ונקבל: $y^2 = (2\cdot 3+6)x+9-3^2 \Rightarrow \mathbf{y^2 = 12x}$

התקבלה משוואה של פרבולה מהצורה $y^2 = 2px$.



ב. 1) מוקד הפרבולה $y^2 = 12x$ נמצא בנקודה $F(3;0)$ ומדריך הפרבולה הוא הישר $x = -3$.

נסמן ב- $y_A = t$ ונקבל $x_A = \frac{t^2}{12} \Leftarrow A(\frac{t^2}{12};t)$.

משוואת המשיק לפרבולה : $y_A \cdot y = 6(x+x_A) \Leftarrow$

$$\mathbf{y = \frac{6}{t}x+\frac{t}{2}} \Leftarrow y = \frac{6}{t}(x+\frac{t^2}{12}) \Leftarrow t\cdot y = 6(x+\frac{t^2}{12})$$

הנקודה G נמצאת על מדריך הפרבולה כך שהקטע GF

מאונך למשיק לפרבולה בנקודה A . שיפוע המשיק הוא $\frac{6}{t}$ לכן שיפוע הישר GF הוא $-\frac{t}{6}$.

משוואת הישר GF היא: $y=-\frac{t}{6}(x-3) \Leftarrow \mathbf{y=-\frac{t}{6}x+\frac{t}{2}}$.

2) נמצא את שיעורי הנקודה G :

$$x_G=-3 \Rightarrow y_G=-\frac{t}{6}(-3)+\frac{t}{2}=t \Rightarrow G(-3;t)$$

נסמן ב- M את נקודת החיתוך של הקטע GF עם המשיק. נמצא את שיעורי הנקודה M, נקודת החיתוך של המשיק AM עם האנך GF :

$$-\frac{t}{6}x+\frac{t}{2}=\frac{6}{t}x+\frac{t}{2} \Rightarrow \left(\frac{6}{t}+\frac{t}{6}\right)x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$$

$$x_M=0 \Rightarrow y_M=-\frac{t}{6}\cdot 0+\frac{t}{2} \Rightarrow y_M=\frac{t}{2} \Rightarrow M(0;\frac{t}{2})$$

אמצע הקטע GF : $x=\frac{-3+3}{2}=0\ ,\ y=\frac{t+0}{2}=\frac{t}{2}$

לכן , הנקודה M היא אמצע הקטע FG.

פתרון שאלה מס' 2

א. 1) $\sphericalangle BCD=90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=0$

$$\overrightarrow{BC}=\underline{v}-\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{DC}=\underline{v}-\underline{w} \Rightarrow$$

$$(\underline{v}-\underline{u})\cdot(\underline{v}-\underline{w})=|\underline{v}|^2-\underline{v}\cdot\underline{w}-\underline{u}\cdot\underline{v}+\underline{u}\cdot\underline{w}=0 \Rightarrow$$

$$a^2-26-28+25=0 \Rightarrow a^2=29 \Rightarrow \mathbf{a=\sqrt{29}}$$

2) $\underline{r}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{w}\right)\cdot(\underline{v}-\underline{u})=\frac{1}{2}(28-29+26-25)=0$

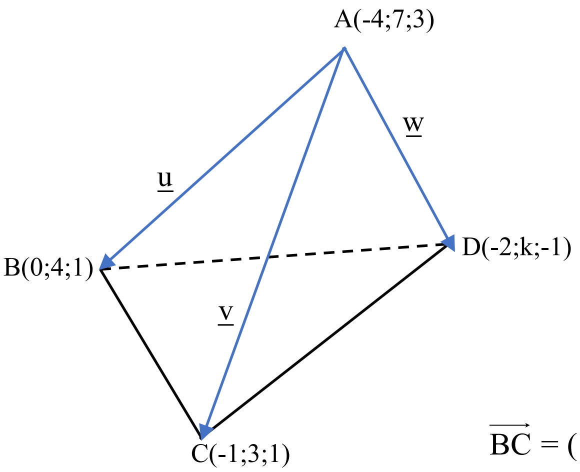
$$\underline{r}\cdot\overrightarrow{DC}=\left(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{w}\right)\cdot(\underline{v}-\underline{w})=\frac{1}{2}(28-25+26-29)=0$$

קיבלנו : הווקטור $\underline{r}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{w}$ מאונך לשני ווקטורים בלתי תלויים במישור BCD ,
לכן הוא מאונך למישור.

3) $BD=\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{(\underline{w}-\underline{u})\cdot(\underline{w}-\underline{u})}=\sqrt{29-2\cdot 25+29}=2\sqrt{2}$

$$BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(\underline{v}-\underline{u})\cdot(\underline{v}-\underline{u})}=\sqrt{29-2\cdot 28+29}=\sqrt{2} \Rightarrow BD=2BC$$

ב. 1) $A(-4;7;3)\ ,\ \underline{u}=(4;-3;-2) \Rightarrow$



$x_B+4=4\ ,\ y_B-7=-3\ ,\ z_B-3=-2 \Rightarrow \mathbf{B(0;4;1)}$

$\underline{v}=(3;-4;-2)\Rightarrow$

$x_C+4=3\ ,\ y_C-7=-4\ ,\ z_C-3=-2 \Rightarrow \mathbf{C(-1;3;1)}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}=(-1;-1;0)\ ,\ \overrightarrow{CD}=(-1;k-3;-2)$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow(-1;-1;0)\cdot(-1;k-3;-2)=0\Rightarrow$

$1-k+3=0\Rightarrow k=4\Rightarrow \mathbf{D(-2;4;-1)}$

2) נמצא את הווקטור $(A;B;C)$ האנך למישור BCD :

$\overrightarrow{BC}=(-1;-1;0)=-(1;1;0)\ ,\ \overrightarrow{CD}=(-1;1;-2)=-(1;-1;2)\Rightarrow$

$(A;B;C)\cdot(1;1;0)=0\Rightarrow A+B=0\Rightarrow A=-B$,

$(A;B;C)\cdot(1;-1;2)=0\Rightarrow A-B+2C=0$. נבחר $B=-1$ ונקבל $A=1$,

$2+2C=0\Rightarrow C=-1$. מתקבלת המשוואה $x-y-z+d=0$. נציב את שיעורי

הנקודה $B(0;4;1)$ ונקבל $-4-1+d=0\Rightarrow d=5$

משוואת המישור BCD : $\mathbf{x-y-z+5=0}$

ג. 1) המישור π מקביל למישור $x-y-z+5=0$ לכן משוואתו מהצורה $x-y-z+D=0$

נציב את שיעורי הנקודה $A(-4;7;3)$ ונקבל $-4-7-3+D=0 \Leftarrow D=14$

משוואת המישור π : $\mathbf{x-y-z+14=0}$

2) הישר BP מאונך למישור π לכן ווקטור הכיוון שלו הוא $(1;-1;-1)$ וההצגה הפרמטרית של

הישר BP הוא $\underline{x}=(0;4;1)+t(1;-1;-1)$ ונוכל לסמן $P(t;4-t;1-t)$.

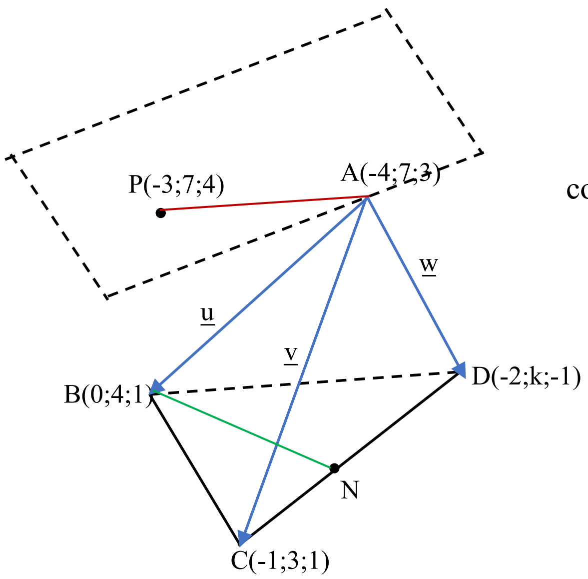
P נקודת החיתוך של BP עם מישור π לכן : $t-(4-t)-(1-t)+14=0 \Leftarrow 3t+9=0$

$\Rightarrow t=-3\Rightarrow \mathbf{P(-3;7;4)}$

3) הזווית β בין הישרים AP ו- CD :

$\overrightarrow{CD}=(-1;1;-2)\ ,\ \overrightarrow{AP}=(-3+4;7-7;4-3)=(1;0;1)$

$$\cos\beta=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{\left|(1;0;1)\cdot(-1;1;-2)\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\beta=\mathbf{30^\circ}$$



הערה: ניתן להסיק זאת גם על פי סעיף א-3) בו מצאנו כי

$BD=2BC$ לכן $\sphericalangle BDC=30^\circ$. הישרים AP ו- BD

מקבילים , לכן הזווית בין הישרים AP ו- CD היא גם בת 30°.

ד. הישרים AP ו- BN נמצאים במישורים מקבילים, לכן הם

מצטלבים או מקבילים אך **אינם נחתכים**.

פתרון שאלה מס' 3

א. הייצוג הטריגונומטרי של המספר $w=1+\sqrt{3}i$: $R=\sqrt{1+3}=2$,

$\tan\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=60^\circ+180^\circ k$. $0^\circ<\theta<90^\circ \Leftarrow \theta=60^\circ \Leftarrow$

$$\Rightarrow w=2\text{cis}60^\circ\Rightarrow w^3=\left(2\text{cis}60^\circ\right)^3=8\text{cis}180^\circ=-8$$

מתקבלת המשוואה $z^5=-8$. כל אחד מחמשת הפתרונות של המשוואה $z_1,z_2,....z_5$

מקיים : $(z_k)^5=-8\Rightarrow(z_k)^{10}=64$. לכן , ערך הביטוי

$(z_1)^{10}+(z_2)^{10}+(z_3)^{10}+(z_4)^{10}+(z_5)^{10}$ הוא $64\cdot5=$ **320**

ב. $z^5=\left(2\text{cis}60^\circ\right)^3=8\text{cis}180^\circ\Rightarrow z^5=8\text{cis}(180^\circ+360^\circ k)\Rightarrow$

$\Rightarrow z_k=\sqrt[5]{8}\text{cis}(36^\circ+72^\circ k)$. מקבלים :

$z_1=\sqrt[5]{8}\text{cis}36^\circ$, $z_2=\sqrt[5]{8}\text{cis}108^\circ$.

בסדרה ההנדסית $a_1,a_2,a_3,....$ מתקיים *ת* $a_1=\sqrt[5]{8}\text{cis}36^\circ$, $a_2=\sqrt[5]{8}\text{cis}108^\circ$ לכן מנת הסדרה

היא *ת* $q=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{\sqrt[5]{8}\text{cis}108^\circ}{\sqrt[5]{8}\text{cis}36^\circ}=\text{cis}72^\circ$. מקבלים:

$$a_{5n+3}=a_1\cdot q^{5n+2}=\sqrt[5]{8}\text{cis}36^\circ\cdot\left(\text{cis}72^\circ\right)^{5n+2}=\sqrt[5]{8}\text{cis}36^\circ\cdot\left(\text{cis}72^\circ\right)^2\cdot\left(\text{cis}72^\circ\right)^{5n}=$$

$$\sqrt[5]{8}\text{cis}36^\circ\cdot\text{cis}144^\circ\cdot\left[\left(\text{cis}72^\circ\right)^5\right]^n=\sqrt[5]{8}\text{cis}180^\circ\left(\text{cis}360^\circ\right)^n=\sqrt[5]{8}\cdot(-1)\cdot1=\mathbf{-\sqrt[5]{8}}$$

התקבל מספר ממשי

ג. 1) $b_1,b_2,b_3,....$ סדרה הנדסית שבה $b_1=a_1=\sqrt[5]{8}\text{cis}36^\circ, b_3=a_2=\sqrt[5]{8}\text{cis}108^\circ$

נסמן ב- Q את מנת הסדרה $b_1,b_2,b_3,....$ ונקבל:

$$b_3=b_1\cdot Q^2\Rightarrow\sqrt[5]{8}\text{cis}108^\circ=\sqrt[5]{8}\text{cis}36^\circ\cdot Q^2\Rightarrow Q^2=\frac{\sqrt[5]{8}\text{cis}108^\circ}{\sqrt[5]{8}\text{cis}36^\circ}=\text{cis}72^\circ\Rightarrow$$

$$Q^2=\text{cis}(72^\circ+360^\circ k)\Rightarrow Q_{1,2}=\text{cis}(36^\circ+180^\circ k)\Rightarrow$$

$$Q_1=\text{cis}(36^\circ)\ ,\ Q_2=\text{cis}216^\circ\Rightarrow b_2=\sqrt[5]{8}\text{cis}36^\circ\cdot\text{cis}36^\circ=\sqrt[5]{8}\text{cis}72^\circ$$

או $b_2=\sqrt[5]{8}\text{cis}36^\circ\cdot\text{cis}216^\circ=\sqrt[5]{8}\text{cis}252^\circ$. b_2 ברביע הראשון, לכן $b_2=\sqrt[5]{8}\text{cis}72^\circ$.

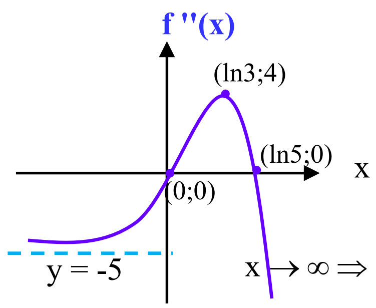
מקבלים : $Q=\frac{\sqrt[5]{8}cis72^\circ}{\sqrt[5]{8}cis36^\circ}=\mathbf{cis36^o}$

מנת הסדרה $b_1,b_2,b_3,....$ היא $\mathbf{cis36^o}$

2) $b_{10n+5}=b_1\cdot q^{10n+4}=\sqrt[5]{8}cis36^\circ\cdot\left(cis36^\circ\right)^{10n+4}=\sqrt[5]{8}cis36^\circ\cdot\left(cis36^\circ\right)^4\cdot\left(cis36^\circ\right)^{10n}=$

$\sqrt[5]{8}cis36^\circ\cdot cis144^\circ\cdot\left[\left(cis36^\circ\right)^{10}\right]^n=\sqrt[5]{8}cis180^\circ\cdot\left(cis360^\circ\right)^n=-\sqrt[5]{8}=a_{5n+3}$

פתרון שאלה מס' 4



א. 1) $f(x)=-\frac{e^{2x}}{4}+6e^x-\frac{5x^2}{2}\Rightarrow f'(x)=-\frac{e^{2x}}{2}+6e^x-5x\Rightarrow$

$f''(x)=-e^{2x}+6e^x-5$

אסימפטוטות לגרף הפונקציה $f''(x)$ המאונכות לציר ה- y :

הישר y = - 5 אסימפטוטה $\Rightarrow x\to-\infty\Rightarrow f''(x)\to-5$, $x\to\infty\Rightarrow f''(x)\to-\infty$

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

עם ציר ה- y : $f''(0)=0\Rightarrow(0;0)$

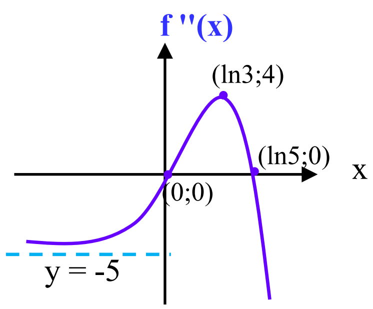
עם ציר ה- x : $-e^{2x}+6e^x-5=0\Rightarrow e^x=1,e^x=5\Rightarrow x=0\ ,\ x=\ln5\Rightarrow(0;0)\ ,\ (\ln5;0)$

נקודות קיצון: $f'''(x)=-2e^{2x}+6e^x=0\Rightarrow 2e^x(e^x-3)=0\Rightarrow e^x=3\Rightarrow x=\ln3$

$f''(\ln3)=-9+18-5=4\Rightarrow(\ln3;4)$

נקודת מקסימום $(\ln3;4)$ $\Leftarrow f''''(x)=-4e^{2x}+6e^x\Rightarrow f''''(\ln3)<0\Rightarrow$

גרף הפונקציה $f''(x)$:



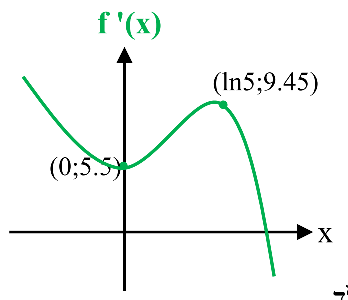
2) על פי השרטוט:

x	x<	0	<x<	ln5	<x
f ''(x)	-	0	+	0	-
f '(x)	↘	min	↗	Max	↘

$f'(0)=5.5\ ,f'(\ln5)=9.45\Leftarrow$ הנקודות $(0;5.5)$ ו- $(\ln5;9.45)$

הן נקודות המינימום והמקסימום של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

$\Rightarrow x\to-\infty\Rightarrow f'(x)\to\infty\ ,\ x\to\infty\Rightarrow f'(x)\to-\infty$



לפונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$ אין אסימפטוטות

מאונכות לצירים. לכן גרף הפונקציה הוא מהצורה:

ב. 1) גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר ה-x

בנקודה אחת הנמצאת בתחום $x > \ln 5$. על פי תחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$,

הנקודה היא נקודת מקסימום של $f(x)$. מקבלים:

לפונקציה $f(x)$ יש **נקודת מקסימום בתחום $x > \ln 5$**

2) $f(0) = 5.75 \ , \ f(\ln 5) = 17.27$

על פי תחומי החיוביות והשליליות של $f''(x)$: מקבלים : הנקודות **$(0;5.75)$ ו- $(\ln 5;17.27)$**

הן **נקודות הפיתול** של הפונקציה $f(x)$.

תחום הקעירות כלפי מטה: $x > \ln 5 \ , \ x < 0$

תחום הקעירות כלפי מעלה: $0 < x < \ln 5$

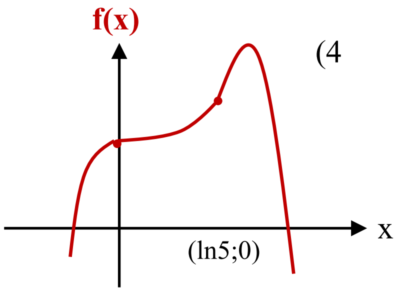
3) $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to -\infty \ , \ x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$

ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודה בה $x = 0$ הוא 5.75 והפונקציה

עולה עד לנקודת המקסימום שנמצאת מימין ל- $x = \ln 5$,

לכן, גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x **בשתי נקודות**

4)



ג. 1) תחום ההגדרה של הפונקציה $g''(x) = \dfrac{1}{f''(x)}$:

$f''(x) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x \neq 0, x \neq \ln 5}$.

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x: $\mathbf{x = 0, x = \ln 5}$

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y:

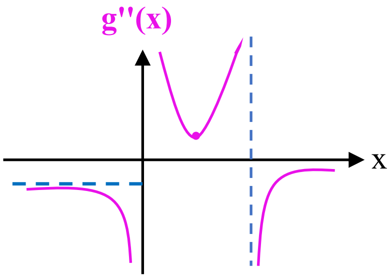
$$x \to \infty \Rightarrow f''(x) \to -\infty \Rightarrow g''(x) \to 0 \ , \ x \to -\infty \Rightarrow f''(x) \to -5 \Rightarrow g''(x) \to -\frac{1}{5}$$

מתקבלות האסימפטוטות : $\mathbf{y = 0 \ , \ y = -\frac{1}{5}}$

נקודות קיצון: תחומי העלייה והירידה של $g''(x)$ הפוכים מאלה של $f''(x)$, לכן:

$\mathbf{(\ln 3;\frac{1}{4})}$ נקודת מינימום של $g''(x)$

2)



פתרון שאלה מס' 5

א. 1) תחום ההגדרה: $x > 0$ וגם $\ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. מקבלים : $\mathbf{0 < x < 1 \, , x > 1}$

2) **אסימפטוטה** $\mathbf{x = 0}$ $x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty \Rightarrow$

אסימפטוטה $\mathbf{x = 1}$ $x \to 1^+ \Rightarrow f(x) \to \infty, x \to 1^- \Rightarrow f(x) \to -\infty \Rightarrow$

אין אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty \Rightarrow$

3) $$f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(\ln x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\ln x)^2 - 1}{x(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (\ln x)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\ln x)^2 = 1 \Rightarrow \ln x = \pm 1 \Rightarrow x = e \, , x = e^{-1}$$

$$f(e) = 2 \, , f(e^{-1}) = -2$$

x	0	$<x<$	e^{-1}	$<x<$	1	$<x<$	e	$<x$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+
$f(x)$		↗	Max	↘		↘	min	↗

מקבלים : $\mathbf{(e;2)}$ **נקודת מינימום** , $\mathbf{(e^{-1};-2)}$ **נקודת מקסימום**

ב. 1) $g(x) = f'(x) = \dfrac{(\ln x)^2 - 1}{x(\ln x)^2}$.

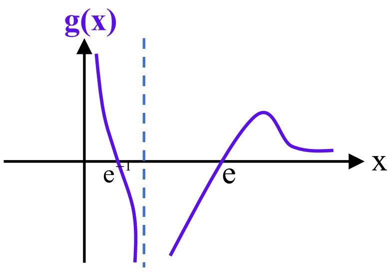
תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x :

אסימפטוטה $\mathbf{x = 0}$ $x \to 0^+ \Rightarrow g(x) \to \infty \Rightarrow \frac{(\ln x)^2}{x(\ln x)^2} \to \frac{1}{x} \to \infty \Rightarrow$

אסימפטוטה $\mathbf{x = 1}$ $x \to 1^- \Rightarrow g(x) \to -\infty, x \to 1^+ \Rightarrow g(x) \to -\infty \Rightarrow$

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y :

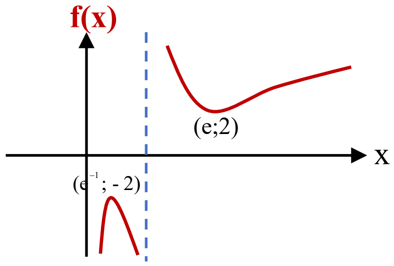


2) **אסימפטוטה** $\mathbf{y = 0}$ $x \to \infty \Rightarrow g(x) \to \frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow$

3) לפונקציית הנגזרת $g(x)$ יש נקודת קיצון אחת בתחום $x > e$

לכן לפונקציה $f(x)$ יש **נקודת פיתול אחת**

ג. 1)



2) $h(x)=\ln(ax)+\dfrac{1}{\ln x} \Leftarrow$

$h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x\ln^2 x}=\dfrac{\ln^2 x-1}{x\ln^2 x} \Rightarrow h'(x)=f'(x) \Rightarrow$ לפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ אותו

תחום הגדרה, אותם שיעורי x של נקודות קיצון ואותם תחומי עלייה וירידה. לכן,

גרף הפונקציה $h(x)$ ישיק לציר ה- x אם גרף הפונקציה $f(x)$ יוזז אנכית 2 יחידות כלפי מטה או 2 יחידות כלפי מעלה. מקבלים:

$$h(x)=\ln(ax)+\frac{1}{\ln x}=\ln a+\ln x+\frac{1}{\ln x}\Rightarrow$$

אפשרות 1: $\ln a=-2 \Rightarrow \mathbf{a=e^{-2}}$, אפשרות 2: $\ln a=2 \Rightarrow \mathbf{a=e^{2}}$.

ד. 1) הפונקציה $k(x)=\dfrac{1}{x}\cdot f(x)$ חיובית לכל ערך של x בתחום $x\ge e$, לכן הפונקציה

$s(x)=\displaystyle\int_e^x k(t)dt$ היא פונקציה עולה בתחום $x\ge e$.

2) הערך המקסימלי של הפונקציה $s(x)$ בתחום $e\le x\le e^9$ מתקבל עבור $x=e^9$.

חישוב: $s(e^9)=\displaystyle\int_e^{e^9}k(t)dt=\int_e^{e^9}\frac{1}{t}\left(\ln t+\frac{1}{\ln t}\right)dt=\int_e^{e^9}\left(\frac{1}{t}\ln t+\frac{1}{t\cdot\ln t}\right)dt=$

$$=\left(\frac{(\ln t)^2}{2}+\ln|\ln t|\right)\Bigg|_e^{e^9}=\left(\frac{(9)^2}{2}+\ln 9\right)-\left(\frac{(1)^2}{2}+\ln 1\right)=\mathbf{42.197}$$