

**מבחן מס' 1**

**פרק ראשון: גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים**

1. הישר  $y = -3x + 4$  חותך ממעגל שמרכזו  $M(8;4)$  מיתר שאורכו  $4.8\sqrt{10}$ .  
א. מצאו את משוואת המעגל.

ב. נתונה משוואת מעגל שמרכזו  $N$ :  $(x + 2m)^2 + (y + m)^2 = 16.2$ .

(1) מצאו את ערכי  $m$  עבורם המעגל  $N$  חותך את המעגל  $M$ .

(2) מצאו את  $m$  עבורו מרכז המעגל  $N$  נמצא ברביע השלישי והמעגל משיק מבחוץ למעגל  $M$ .

ג. נתון: מרכז המעגל  $N$  נמצא ברביע השלישי והמעגל משיק מבחוץ למעגל  $M$ .

(1) ישר ששיפועו 2 משיק למעגל  $M$  בנקודה הנמצאת ברביע השני. מצאו את משוואת המשיק.

(2) האם המשיק שמצאת בסעיף ג-2) משיק גם למעגל  $N$ ? נמקו.

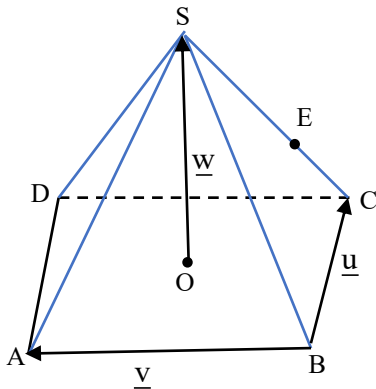
(3) מצאו את היחס בין רדיוס המעגל  $M$  לרדיוס מעגל  $N$ .

(4) מצאו את שיעורי הנקודה  $T$ , נקודת ההשקה של המעגלים  $M$  ו- $N$ .

ד. מרכז המעגל  $N$  נמצא ברביע השלישי והמעגל משיק מבחוץ למעגל  $M$ .

(1) הראו שהמקום הגיאומטרי של הנקודות במישור שאורך המשיק מהן למעגל  $M$  שווה לאורך המשיק מהן למעגל  $N$  הוא קו ישר.

(2) האם הישר שמצאת בסעיף ד-1) מתלכד עם המשיק המשותף לשני המעגלים בנקודה  $T$ ? נמקו.



2. נתונה פירמידה ישרה  $SABCD$  שבסיסה הוא המלבן  $ABCD$ .

הנקודה  $O$  היא נקודת מפגש אלכסוני המלבן  $ABCD$ .

נתון:  $|\underline{v}|=10$ ,  $|\underline{u}|=8$ ,  $\overrightarrow{BC} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{BA} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{OS} = \underline{w}$ .

א. הביעו את הווקטורים  $\overrightarrow{BS}$  ו-  $\overrightarrow{AS}$  באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו-  $\underline{w}$ .

ב. חשבו את אורך הווקטור  $\underline{w}$  עבורו  $\overrightarrow{AS}$  מאונך ל-  $\overrightarrow{BS}$ .

ג. הנקודה  $E$  נמצאת על המקצוע  $SC$  כך שמתקיים:  $\frac{SE}{EC} = \frac{3}{2}$ .

(1) הביעו את הווקטור  $\overrightarrow{AE}$  באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו-  $\underline{w}$ .

(2) חשבו את הזווית  $\sphericalangle SAE$ .

ד. נתון:  $\underline{v} = (0; -10; 0)$ ,  $A(6; 3; 1)$ ,  $D(-2; 3; 1)$ ,  $S(2; 8; 4)$ .

(1) מצאו את שיעורי הנקודה  $B$ , את שיעורי הנקודה  $C$  ואת שיעורי הנקודה  $E$ .

(2) הראו כי  $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BS}$ .

(3) מצאו את משוואת מישור המשולש  $SAB$ .

(4) חשבו את נפח הפירמידה  $ESAB$ .

ה. (1) מצאו את מישור המשולש  $SDB$ .

(2) חשבו את הזווית בין מישור המשולש  $SDB$  והישר  $AE$ .

(3) מצאו את ההצגה הפרמטרית של ישר החיתוך של המישורים  $SAB$  ו-  $SDB$ .

$$3. \text{ א. פתרו את המשוואה } \left( \frac{z + 4i}{z - 2i} \right)^4 = 1$$

ב. הראו כי פתרונות המשוואה נמצאים על ישר המקביל לציר ה-  $x$ .

ג. שניים מבין פתרונות המשוואה אינם מספרים מדומים טהורים. דרך הנקודות  $A$  ו-  $B$  המתאימות

למספרים אלה במישור של גאוס עובר מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

(1) הקטע  $AB$  הנו אחד האלכסונים של דלתון החסום במעגל. מצאו את המספרים במישור של

גאוס המייצגים את שני הקודקודים האחרים של הדלתון.

(2) חשבו את שטח הדלתון.

**פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציה מעריכית ופונקציה לוגריתמית**

4. א. נתונה הפונקציה  $f(x) = (x - a)e^x$ . הראו כי מתקיים:  $f'(x) = (x - a + 1)e^x$ ,

ב. נתונה הפונקציה  $g(x) = (x - 1)e^x$  המוגדרת לכל  $x$ .

(1) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה  $g(x)$  עם הצירים.

(2) מצאו אסימפטוטה לגרף הפונקציה  $g(x)$  המאונכת לציר ה- $y$ .

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  וקבעו את סוגה.

(4) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

ג. הפונקציה  $h(x)$  מקיימת:  $h'(x) = g(x)$ . הישר  $y = e$  הנו אסימפטוטה לגרף הפונקציה  $h(x)$ .

היעזרו בסעיף א' ומצאו את הפונקציה  $h(x)$ .

ד. נתון:  $h(x) = (x - 2)e^x + e$ .

(1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $h(x)$  וקבעו את סוגה.

(2) הגרפים של הפונקציות  $g(x)$  ו- $h(x)$  נחתכים רק בנקודה אחת. הוסיפו לשרטוט של גרף

הפונקציה  $g(x)$  את הסקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$ .

ה. הפונקציה  $k(x)$  מקיימת:  $k(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ .

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $k(x)$ .

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה  $k(x)$ .

ו. הפונקציה  $m(x)$  מוגדרת בתחום  $x > 1$ . נתון:  $m'(x) = k(x)$ ,  $m(2) = 1$ .

מצאו את הפונקציה  $m(x)$ .

5. נתונה הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ :  $f'(x) = \frac{2a \cdot \ln x + 2a}{x}$ ,  $a$  פרמטר חיובי.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה, את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים, את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, ואת שיעורי נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ . הביעו בעזרת  $a$  לפי הצורך.

(2) שרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

ב. המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $(1;3)$  שעליה, חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 1$ . מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .

ג. היעזרו בסעיפים הקודמים מצאו את:

(1) נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבעו את סוגה.

(2) נקודות פיתול, תחומי הקעירות כלפי מעלה ותחומי הקעירות כלפי מטה של הפונקציה  $f(x)$ .

(3) האם קיימת נקודה על גרף הפונקציה  $f(x)$  שבה שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא 3? נמקו את קביעתכם.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ה. הראו כל לכל ערך של  $x$  בתחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$  מתקיים אי-השוויון:

$$\ln^2 x + 2 \ln x \geq -1$$

ו. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g(x) = k \cdot f'(x)$ ,  $k > 0$ . השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $g(x)$ , ציר ה- $x$  והישר  $x = e$  הוא 1. מצאו את  $k$ .

בהצלחה!

תשובות

1. א.  $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 115.2$  (ב. 1)  $-10.6 < m < -7$  או  $-1 < m < 2.6$

2. א.  $m = 2.6$  (ג. 1)  $y = 2x + 12$  (ד. 2) לא  $\frac{8}{3}$  (3)  $T(-1.6; -0.8)$  (4)

ד. 1)  $y = -2x - 4$  (2) כן

2. א.  $\overline{AS} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}$ ,  $\overline{BS} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}$  .ג.  $|\underline{w}| = 3$

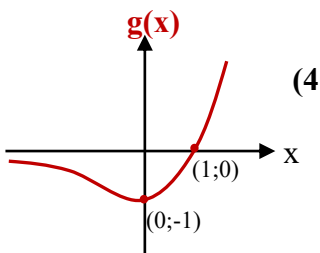
1. א.  $\overline{AE} = \frac{4}{5}\underline{u} - \frac{4}{5}\underline{v} + \frac{2}{5}\underline{w}$

2)  $\angle SAE = 18.42^\circ$  (ד. 1)  $B(6; 13; 1)$ ,  $C(-2; 13; 1)$ ,  $E(-0.4; 11; 2.2)$

3)  $24(4) \quad 3x + 4z - 22 = 0$

1. א.  $5x - 4y + 22 = 0$  (2)  $75.69^\circ$  (3)  $\underline{x} = (-4.4; 0; 8.8) + t(4; 5; -3)$

3. א.  $z_1 = 3 - i$ ,  $z_2 = -i$ ,  $z_3 = -3 - i$  (ג. 1)  $z = \sqrt{10} \cdot i$ ,  $z = -\sqrt{10} \cdot i$  (2)  $6\sqrt{10}$



(4)

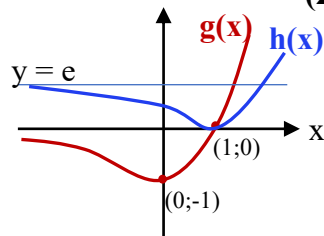
4. א. 1)  $(1; 0)$ ,  $(0; -1)$  (2)  $y = 0$  (3)  $(0; -1)$  מינימום

ג.  $h(x) = (x-2)e^x + e$  (ד. 1)  $(1; 0)$  מינימום (2)

ה. 1)  $x \neq 1$  (2) תחום החיוביות:  $x > 1$

תחום השליליות:  $x < 1$

ו.  $m(x) = \ln[(x-2)e^x + e]$



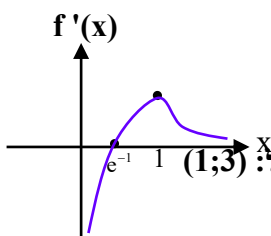
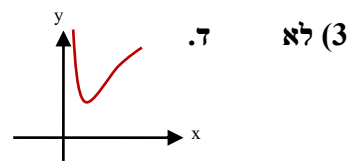
5. א. 1) תחום ההגדרה:  $x > 0$ , אסימפטוטות:  $x = 0$ ,  $y = 0$

נקודות חיתוך עם הצירים:  $(\frac{1}{e}; 0)$ , נקודות קיצון:  $(1; 2a)$  (2) מקסימום

ג.  $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x + 3$  (1)  $(\frac{1}{e}; 2)$  מינימום (2) נקודת פיתול:  $(1; 3)$

תחום קעירות כלפי מעלה:  $0 < x < 1$ , תחום קעירות כלפי מטה:  $x > 1$

ו.  $k = \frac{1}{4}$



**מבחן מס' 2**

**פרק ראשון: גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים**

1. א. 1) נתונה משוואת מעגל:  $(x - a)^2 + y^2 = 1$ ,  $a > 1$ .

הביעו באמצעות  $a$  את משוואת המקום הגיאומטרי של הנקודות שהן מרכזי המעגלים המשיקים לישר  $x = -2$  ומשיקים מבחוץ למעגל הנתון.

2) נתון: הנקודה  $(0;0)$  נמצאת על המקום הגיאומטרי שמצאתם בסעיף א-1).

הראו שמשוואת המקום הגיאומטרי מייצגת פרבולה ומצאו את משוואתה.

ב. הנקודה  $A$  נמצאת על הפרבולה שמצאתם בסעיף א-2). הנקודה  $F$  היא מוקד הפרבולה.

מעבירים משיק לפרבולה בנקודה  $A$ . מן המוקד  $F$  מעבירים אנך למשיק.

1) סמנו ב-  $t$  את שיעור ה-  $y$  של הנקודה  $A$  והביעו באמצעות  $t$  את משוואת המשיק לפרבולה

בנקודה  $A$  ואת משוואת האנך למשיק היוצא מנקודה  $F$ .

2) האנך למשיק חותך את מדריך הפרבולה בנקודה  $G$ .

הראו שהמשיק חוצה את הקטע  $FG$ .

2. נתונה פירמידה ABCD שבסיסה משולש.

נתון:  $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = a$ ,  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$ ,

$\angle BCD = 90^\circ$ ,  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 28$ ,  $\underline{u} \cdot \underline{w} = 25$ ,  $\underline{v} \cdot \underline{w} = 26$ .

א. (1) חשבו את  $a$ .

(2) הוכיחו כי הווקטור  $\underline{r} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w}$

מאונך למישור המשולש BCD.

(3) הראו כי  $BD = 2BC$ .

ב. נתון:  $A(-4;7;3)$ ,  $D(-2;k;-1)$ ,  $\underline{v} = (3; -4; -2)$ ,  $\underline{u} = (4; -3; -2)$ .

(1) מצאו את שיעורי הנקודות B, C ו-D.

(2) מצאו את משוואת המישור בו נמצא המשולש BCD.

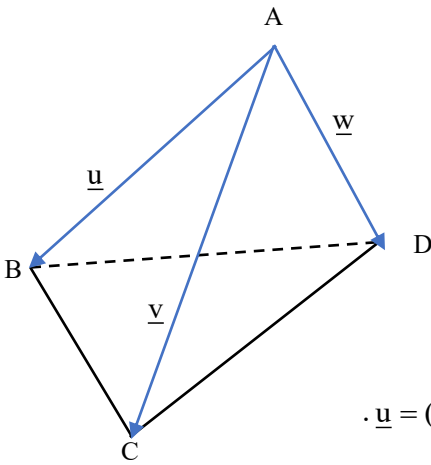
ג. (1) מצאו משוואת מישור  $\pi$  העובר בנקודה A ומקביל למישור המשולש BCD.

(2) מצאו נקודה P במישור  $\pi$  כך שהווקטור  $\overrightarrow{BP}$  מאונך למישור  $\pi$ .

(3) חשבו את הזווית בין הישרים AP ו-CD.

ד. הנקודה N נמצאת על המקצוע CD במשולש BCD.

האם הישר BN יחתוך את הישר AP? נמקו.



3. נתון  $w = 1 + \sqrt{3}i$ .

א. נסמן את פתרונות המשוואה  $z^5 = w^3$  ב-  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ .

השבו את ערך הביטוי  $(z_1)^{10} + (z_2)^{10} + (z_3)^{10} + (z_4)^{10} + (z_5)^{10}$ .

ב. נסמן ב-  $z_1$  את הפתרון של המשוואה המיוצג במישור של גאוס על-ידי נקודה הנמצאת ברביע הראשון ונסמן ב-  $z_2$  את הפתרון המיוצג על-ידי נקודה הנמצאת ברביע השני.

נתונה סדרה הנדסית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  המקיימת:  $a_1 = z_1$  ו-  $a_2 = z_2$ .

הראו כי איבר הסדרה  $a_{5n+3}$  הנו מספר ממשי.

ג. בין כל שני איברים של הסדרה מכניסים איבר נוסף כך שנוצרת סדרה הנדסית חדשה

$(b_1, b_2, b_3, \dots)$  (הם אברי הסדרה המקורית).

נתון:  $b_2$  מיוצג במישור של גאוס על-ידי נקודה הנמצאת ברביע הראשון.

(1) מצאו את מנת הסדרה  $b_1, b_2, b_3, \dots$ .

(2) האם נכונה הטענה  $b_{10n+5} = a_{5n+3}$ ? נמקו.

**פרק שני- גדילה ודעיכה, פונקציה מעריכית ופונקציה לוגריתמית**

4. הפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ו- $f''(x)$  מוגדרת לכל ערך של  $x$ .

$$f(x) = -\frac{e^{2x}}{4} + 6e^x - \frac{5x^2}{2} \quad \text{נתון:}$$

א. (1) חקרו את פונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$  ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f''(x)$ .  
סמנו בשרטוט את האסימפטוטות לגרף הפונקציה, את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים ואת שיעורי נקודות הקיצון, אם יש כאלה.

(2) שרטטו סקיצה של פונקציית הנגזרת הראשונה  $f'(x)$ .

ב. (1) האם יש לפונקציה  $f(x)$  נקודות קיצון? אם כן, ציינו את התחום בו נמצא שיעור ה- $x$  של נקודת הקיצון ומה סוג הקיצון.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה  $f(x)$ , את תחומי הקעירות כלפי מעלה ואת תחומי הקעירות כלפי מטה של הפונקציה  $f(x)$ .

(3) כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ ? נמקו.

(4) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g''(x) = \frac{1}{f''(x)}$

(1) מצאו את תחום ההגדרה, את משוואות האסימפטוטות לגרף הפונקציה  $g''(x)$ , את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g''(x)$  וקבעו את סוגה.

(2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g''(x)$ .

$$5. \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$$

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות לגרף הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.
- (3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבעו את סוגן.
- ב. הפונקציה  $g(x)$  היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  :  $g(x) = f'(x)$ .
- לפונקציה  $g(x)$  יש נקודת קיצון אחת בלבד.
- (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות לגרף הפונקציה  $g(x)$  המאונכות לצירים.
- (2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .
- (3) כמה נקודות פיתול יש לגרף הפונקציה  $f(x)$ ? נמקו.
- ג. (1) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

(2) נתונה הפונקציה  $h(x) = \ln(ax) + \frac{1}{\ln x}$ ,  $a > 0$ . גרף הפונקציה  $h(x)$  משיק לציר ה- $x$ .  
מצאו את  $a$  (שני ערכים).

ד. הפונקציות  $k(x) = \frac{1}{x} \cdot f(x)$  ו-  $s(x) = \int_e^x k(t) dt$  בתחום  $x \geq e$ .

- (1) הסבירו מדוע הפונקציה  $s(x)$  עולה בכל תחום הגדרתה.
- (2) חשבו הערך המקסימלי של הפונקציה  $s(x)$  בתחום  $e \leq x \leq e^9$ .

בהצלחה!

תשובות

1. א. (1)  $y^2 = (2a+6)x + 9 - a^2$  (2)  $y^2 = 12x$  ב. (1) משוואת המשיק:  $y = \frac{6}{t}x + \frac{t}{2}$

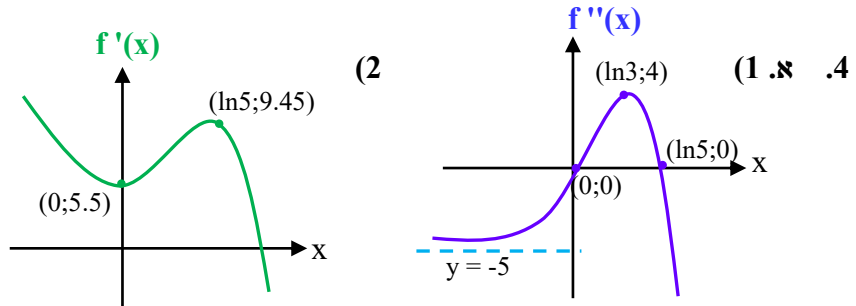
משוואת האנג' למשיק:  $y = -\frac{t}{6}x + \frac{t}{2}$

2. א. (1)  $a = \sqrt{29}$  ב. (1)  $D(-2; 4; -1)$ ,  $C(-1; 3; 1)$ ,  $B(0; 4; 1)$

(2)  $x - y - z + 5 = 0$

ג. (1)  $x - y - z + 14 = 0$  (2)  $P(-3; 7; 4)$  (3)  $30^\circ$  ד. לא

3. א. 320 ג. (1)  $\text{cis}36^\circ$  (2) כן



ג. (1) נקודת מקסימום בתחום  $x > \ln 5$

(2) נקודות פיתול:  $(0; 5.75)$  ו-  $(\ln 5; 17.27)$

תחום הקעירות כלפי מטה:  $x > \ln 5$ ,  $x < 0$

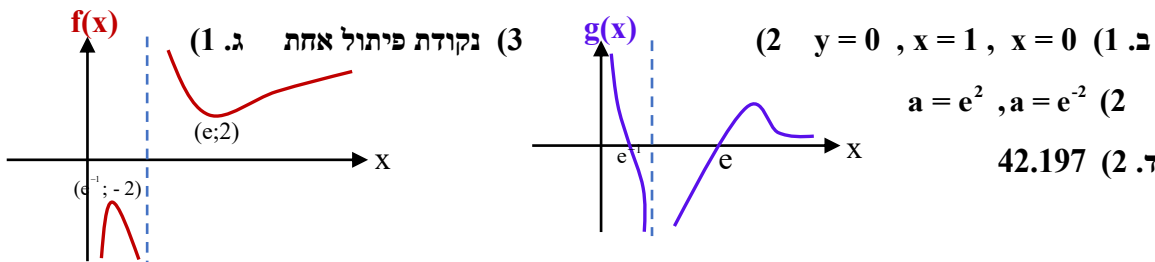
תחום הקעירות כלפי מעלה:  $0 < x < \ln 5$  (3) שתי נקודות (4)

ג. (1) תחום ההגדרה:  $x \neq 0, x \neq \ln 5$

אסימפטוטות:  $x = 0, x = \ln 5$ ;  $y = -\frac{1}{5}, y = 0$

(2) נקודת מינימום  $(\ln 3; \frac{1}{4})$

5. א. (1)  $0 < x < 1, x > 1$  (2)  $x = 0, x = 1$  (3) מינימום  $(e; 2)$ , מקסימום  $(e^{-1}; -2)$



(2)  $a = e^2, a = e^{-2}$

ד. (2) 42.197