# מבחן מס' 1

## פתרון שאלה מס' 1

**א.** 1) $\angle BAC = \angle KAL$ (זווית משותפת) , $KL \parallel BC \Leftarrow \angle ABC = \angle AKL \Leftarrow$

$\Delta ABC \sim \Delta AKL$ (משפט דמיון ז.ז.) $\Leftarrow \frac{AL}{AC} = \frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB} \Leftarrow \frac{AE}{AD} = \frac{KL}{BC}$

(יחס גבהים מתאימים במשולשים דומים שווה ליחס הדמיון)

במשולש ישר-זווית AKL קוטר המעגל החוסם את המשולש הוא KL ובמשולש ישר הזווית ABC קוטר המעגל החוסם את המשולש הוא BC , לכן , על פי הנתון :

$$\frac{1}{2}BC = 3.5 \cdot \frac{1}{2}KL \Rightarrow BC = 3.5 \cdot KL$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{KL}{BC} = \frac{KL}{3.5 \cdot KL} = \frac{1}{3.5} = \mathbf{\frac{2}{7}}$$

2) נסמן את צלע הריבוע ב- x ונקבל:

$$\frac{KL}{BC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{KL}{3.5 \cdot KL} = \frac{11.2 - x}{11.2} \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{11.2 - x}{11.2} \Rightarrow 22.4 = 78.4 - 7x \Rightarrow$$

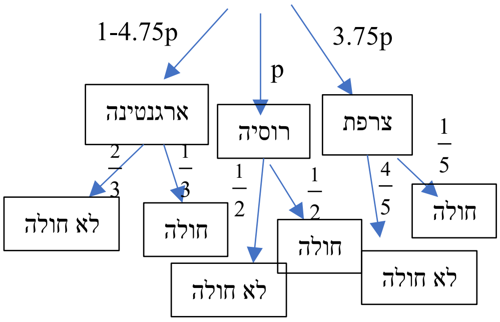
$$\Rightarrow 7x = 56 \Rightarrow x = \mathbf{8}$$

**ב.** 1) $P$ (עולה מרוסיה) $= p \Leftarrow$

$P$ (עולה מצרפת) $= 3.75p \Leftarrow$

$P$ (עולה מארגנטינה) $= 1\text{-}4.75p$

מקבלים: $P$(חולה בשפעת)




$$\frac{1}{5} \cdot 3.75p + \frac{1}{2} \cdot p + \frac{1}{3} \cdot (1 - 4.75p) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p = \mathbf{\frac{1\text{-}p}{3}}$$

2) התנאי לנוכחות בכיתה: הלומד אינו חולה בשפעת.

מקבלים:

$$\frac{(1 - 4.75p) \cdot \frac{2}{3}}{1 - \frac{1\text{-}p}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(1 - 4.75p) \cdot 2}{3(1 - \frac{1\text{-}p}{3})} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 - 9.5p}{3 - (1\text{-}p)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{2 - 9.5p}{2 + p} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4 - 19p = 2 + p \Rightarrow 20p = 2 \Rightarrow \mathbf{p = 0.1}$$

**ג.** 1) נוכיח את נכונות הנוסחה עבור $n = 1$ :

באגף שמאל מקבלים: $\frac{2}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}$ , באגף ימין מקבלים: $\frac{5}{6} - \frac{7}{3 \cdot 4} = \frac{1}{4}$

לכן , הנוסחה נכונה עבור $n = 1$.

נניח שקיים מספר טבעי k עבורו מתקיים:

$$\frac{2}{2\cdot4}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{4\cdot6}+......+\frac{2}{(k+1)(k+3)}=\frac{5}{6}-\frac{2k+5}{(k+2)(k+3)}$$

ונוכיח כי עבור $k+1$ מתקיים:

$$\frac{2}{2\cdot4}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{4\cdot6}+......+\frac{2}{(k+1)(k+3)}+\frac{2}{(k+2)(k+4)}=\frac{5}{6}-\frac{2(k+1)+5}{(k+3)(k+4)}$$

על סמך ההנחה , נותר להוכיח:

$$\frac{5}{6}-\frac{2k+5}{(k+2)(k+3)}+\frac{2}{(k+2)(k+4)}=\frac{5}{6}-\frac{2k+7}{(k+3)(k+4)}$$

נותר להוכיח: $-\frac{2k+5}{(k+2)(k+3)}+\frac{2}{(k+2)(k+4)}=-\frac{2k+7}{(k+3)(k+4)}$

באגף שמאל מקבלים:

$$\frac{-(2k+5)(k+4)+2(k+3)}{(k+2)(k+3)(k+4)}=\frac{-2k^2-\ 8k-5k-20+2k+6}{(k+2)(k+3)(k+4)}=\frac{-2k^2-\ 11k-14}{(k+2)(k+3)(k+4)}$$

באגף ימין מקבלים:

$$-\frac{2k+7}{(k+3)(k+4)}=\frac{-(2k+7)(k+2)}{(k+3)(k+4)(k+2)}=\frac{-2k^2-4k\ -\ 7k-14}{(k+3)(k+4)(k+2)}=\frac{-2k^2-11k-14}{(k+3)(k+4)(k+2)}$$

מסקנה: על פי אקסיומת האינדוקציה, הנוסחה נכונה עבור כל n טבעי

(2

$$\frac{1}{12}+\frac{2}{35}+\frac{1}{24}+......+\frac{1}{60}=\frac{2}{24}+\frac{2}{35}+\frac{2}{48}+....+\frac{2}{120}=\frac{2}{4\cdot6}+\frac{2}{5\cdot7}+\frac{2}{6\cdot8}+....+\frac{2}{10\cdot12}$$

על פי הנוסחה שהוכחנו בסעיף 1) עבור $n=9$ מתקיים:

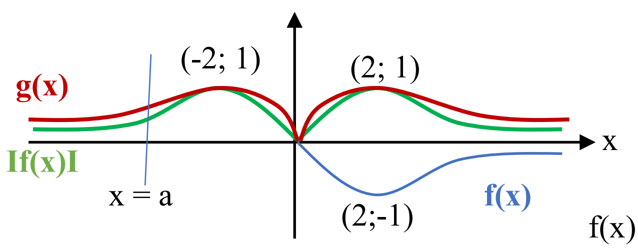
$$\frac{2}{2\cdot4}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{4\cdot6}+\frac{2}{5\cdot7}+\frac{2}{6\cdot8}+......+\frac{2}{10\cdot12}=\frac{5}{6}-\frac{23}{11\cdot12}=\frac{29}{44}\Rightarrow$$

$$\frac{2}{4\cdot6}+\frac{2}{5\cdot7}+\frac{2}{6\cdot8}+......+\frac{2}{10\cdot12}=\frac{29}{44}-(\frac{2}{2\cdot4}+\frac{2}{3\cdot5})=\mathbf{\frac{91}{330}}$$

**ד.** 1) הפונקציה f(x) מוגדרת לכל x ואי-זוגית , לכן , גרף הפונקציה עובר דרך ראשית הצירים והנקודה (-2;1) היא נקודת המקסימום היחידה שלה.

פונקציית הערך המוחלט של f(x) מקיימת : $|f(x)|\geq0$ לכל ערך של x , לכן הפונקציה g(x) מוגדרת **לכל ערך של x** .

2) בתחום $x\leq0$ הפונקציה f(x) אי-שלילית , לכן
בתחום זה מתקיים $|f(x)|=f(x)$.




בתחום $x>0$ הפונקציה f(x) שלילית,
לכן , בתחום זה מתקיים $|f(x)|=-f(x)$ , כלומר,
גרף הפונקציה $|f(x)|$ היא שיקוף של גרף הפונקציה f(x)

ביחס לציר ה- x . היות וערכי הפונקציה ב $|f(x)|$ בנקודות הקיצון הם $y = 0$ ו- $y = 1$ ,
הרי שנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ מתלכדים עם נקודות הקיצון של הפונקציה $|f(x)|$ :
**(-2;1) מקסימום , (0;0) מינימום , (2;1) מקסימום**

3) בתחום $x < 0$ מתקיים : $0 < f(x) \le 1$. השורש הריבועי של מספר בין 0 ל- 1 גדול מן המספר עצמו ובנקודת המקסימום המוחלט מתקיים $\sqrt{f(x)} = f(x) = 1$ , הרי שמקבלים $\sqrt{f(x)} \ge f(x)$. לכן מתקיים $g(x) \ge f(x) \Rightarrow g(a) \ge f(a)$ . הטענה הנכונה היא **טענה III.**

## פתרון שאלה מס' 2

א. בסדרה $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n}$ האיברים האמצעיים הם $a_n$ ו- $a_{n+1}$ . הסדרה עולה , לכן $a_n = \frac{1}{4}$ ו- $a_{n+1} = 1$ . מקבלים : $q = 4 \Leftarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 : \frac{1}{4} = 4$

$$a_1 + a_2 = \frac{5}{1024} \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot 4 = \frac{5}{1024} \Rightarrow 5a_1 = \frac{5}{1024} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1024}$$

$$a_{n+1} = 1 \Rightarrow a_1 \cdot 4^n = 1 \Rightarrow \frac{1}{1024} \cdot 4^n = 1 \Rightarrow 4^n = 1024 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow$$

$$S_{10} = \frac{1}{1024} \cdot \frac{(4^{10} - 1)}{3} = \frac{329525}{1024} = \mathbf{341.333}$$

ב. נמצא את המנה של הסדרה $b_1, b_2, b_3, ...$ : הסדרה מקיימת $b_1 = a_1, b_2 = x, b_3 = a_2$

הסדרה הנדסית לכן $\frac{x}{a_1} = \frac{a_2}{x} \Leftarrow x^2 = a_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot 4a_1 = 4a_1^2$

$$\Rightarrow x = \pm 2a_1 \Rightarrow \frac{x}{a_1} = \pm 2 \Rightarrow \frac{b_2}{b_1} = \pm 2$$

הסדרה אינה עולה ואינה יורדת , לכן מנתה 2 - . $b_1 = a_1 = \frac{1}{1024}$

בסדרה $b_1, b_2, b_3, ...$ נוספו ל- 10 אברי הסדרה $a_1, a_2, a_3, ...$
9 איברים נוספים , לכן מספר אברי הסדרה $b_1, b_2, b_3, ...$ הוא 19. מקבלים :

$$S_{19} = \frac{1}{1024} \cdot \frac{\left[(-2)^{19} - 1\right]}{-3} = \frac{-524289}{-3072} = \mathbf{170.667}$$

ג. $c_1 = b_1 + b_2 \; , \; c_2 = b_2 + b_3 \; , \; c_3 = b_3 + b_4 ... \Rightarrow c_n = b_n + b_{n+1} = b_n + b_n \cdot (-2) \Rightarrow$

$$c_n = -b_n \Rightarrow c_{n+1} = -b_{n+1} \Rightarrow \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = -2 \Rightarrow q = -2$$

$c_1 = -b_1 = -\frac{1}{1024}$ . האיבר האחרון בסדרה $c_1, c_2, c_3, ...$ $c_{18} = b_{18} + b_{19}$ לכן מספר איברי

הסדרה הוא 18 . מקבלים: $S_{18}=-\frac{1}{1024}\cdot\frac{(-2)^{18}-1}{-3}=-\frac{262143}{-3072}=\mathbf{85.333}$

ד. 1) $k_n=\frac{c_n}{a_n}\Rightarrow k_{n+1}=\frac{c_{n+1}}{a_{n+1}}\Rightarrow\frac{k_{n+1}}{k_n}=\frac{c_{n+1}}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_n}{c_n}=\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{1}{4}\cdot(-2)=-\frac{1}{2}\Rightarrow$

$-1<q<0$ לכן הסדרה **מתכנסת**.

2) $k_1=\frac{c_1}{a_1}=\frac{-b_1}{a_1}=-1\Rightarrow S=\frac{-1}{1+0.5}=\mathbf{-\frac{2}{3}}$

## פתרון שאלה מס' 3

א. ניעזר בנוסחת ברנולי: ההסתברות שלפחות מועמד אחד מבין העשרה יתקבל אך לא כולם היא המשלים של ההסתברות שאף אחד לא יתקבל או שכל העשרה יתקבלו:

$$1-\left[P_{10}(0)+P_{10}(10)\right]=\mathbf{1-\left[(1-p)^{10}+p^{10}\right]}$$

ב. צריך לבטא: $P_{10}(k):P_{10}(k+1)\Leftarrow$

$$\frac{10!}{k!(10-k)!}\cdot p^k(1-p)^{10-k}:\frac{10!}{(k+1)!(10-k-1)!}\cdot p^{k+1}(1-p)^{9-k}=$$

$$=\frac{10!p^k(1-p)^{10-k}}{k!(10-k-1)!(10-k)}\cdot\frac{k!(k+1)(10-k-1)!}{10!p^{k+1}(1-p)^{9-k}}=\mathbf{\frac{(k+1)(1-p)}{p(10-k)}}$$

ג. נתון: $P_{10}(6)=7\cdot P_{10}(7)\Leftarrow\frac{P_{10}(6)}{P_{10}(7)}=7\Leftarrow$ על פי הסעיף הקודם, עבור $k=6$ מקבלים

$$\frac{7(1-p)}{p\cdot 4}=7\Rightarrow 1-p=4p\Rightarrow\mathbf{p=0.2}$$

ד. על פי התוצאה של סעיף א': $1-(0.8^{10}+0.2^{10})=\mathbf{0.8926}$

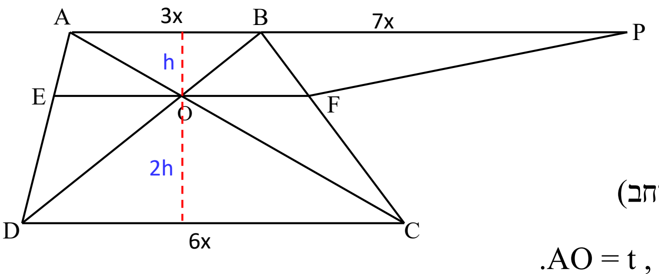
ה. ההסתברות ששני מועמדים מסוימים יתקבלו וגם שמונת המועמדים האחרים לא יתקבלו:

$0.2^2\cdot 0.8^8=\mathbf{0.0067}$

ו. אם ידוע ששני מועמדים מסוימים התקבלו, ההסתברות שכל 8 המועמדים האחרים לא התקבלו היא:

$0.8^8=\mathbf{0.1678}$

# פתרון שאלה מס' 4




א. 1) $\frac{PB}{AB}=\frac{7}{3}$ לכן נוכל לסמן $PB = 7x\ ,\ AB = 3x$

$DC = 2AB$ לכן $DC = 6x$. $AB \parallel CD$ (נתון)

לכן: $\frac{AB}{CD}=\frac{BO}{OD}=\frac{AO}{OC}=\frac{1}{2}$ (משפט תאלס מורחב)

אפשר לסמן: $BO = y\ ,\ DO = 2y$ ו- $AO = t\ ,\ CO = 2t$.

$OF \parallel CD$ (נתון) $\Leftarrow \frac{BO}{BD}=\frac{OF}{DC}$ (משפט תאלס מורחב) $\Leftarrow \frac{OF}{DC}=\frac{y}{3y} \Leftarrow \mathbf{\frac{OF}{DC}=\frac{1}{3}}$

2) **כן**- $\frac{OF}{DC}=\frac{1}{3} \Leftarrow OF=\frac{1}{3}DC$ , $\frac{OE}{DC}=\frac{AO}{AC}=\frac{t}{3t}=\frac{1}{3} \Leftarrow OE=\frac{1}{3}DC \Leftarrow OE = OF$

הגבהים לצלעות השוות OE ו- OF במשולשים AEO ו- BOF שווים זה לזה (המרחק בין שני ישרים מקבילים הוא קבוע) לכן, שטחי המשולשים שווים זה לזה.

3) $AB = 3x\ ,\ OE=\frac{1}{3}DC = 2x \Rightarrow S_{\Delta ABO}=\frac{3xh}{2} \Rightarrow S_{\Delta AEO}=\frac{2xh}{2} \Rightarrow \mathbf{\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta AEO}}=\frac{3}{2}}$

ב. $\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}=\frac{1}{2}$ , $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOC \Rightarrow \Delta AOB = \Delta COD$ (משפט דמיון צ.ז.צ.)

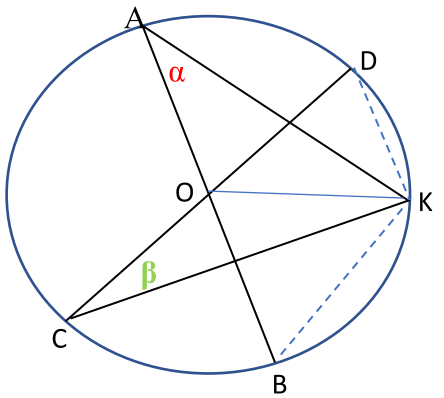
$\Leftarrow$ יחס הגבהים לצלעות AB ו- DC שווה ליחס הדמיון , לכן ניתן לסמן את הגבהים לצלעות AB ו- DC ב- h ו- 2h בהתאמה.

לכן: המרובע APFO הוא טרפז שבסיסיו הם $OF = 2x\ ,\ AP = 10x$ וגובהו h. מקבלים:

$S_{APFO}=\frac{1}{2}(AP+FO)h=\frac{1}{2}(10x+2x)h = 6xh$.

$S_{\Delta DOC}=\frac{1}{2}DC\cdot 2h=\frac{1}{2}6x\cdot 2h = 6xh \Rightarrow S_{\Delta DOC}=S_{APFO}$

# פתרון שאלה מס' 5




א. $\sphericalangle AOC=120^\circ$ (נתון) $\Leftarrow$ $\sphericalangle DOB=120^\circ$ (זוויות קודקודיות

שווה זו לזו) $\Leftarrow$ $\sphericalangle DOK+\sphericalangle KOB=120^\circ$.

$\sphericalangle KOB=2\alpha,\ \sphericalangle DOK=2\beta$ (זווית מרכזית גדולה פי 2

מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת)

$$\Rightarrow 2\alpha+2\beta=120^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=60^\circ$$

ב. 1) **נכון** – כי $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2\beta}{2\alpha}=\frac{\overset{\frown}{DK}}{\overset{\frown}{KB}}$ (יחס הקשתות כיחס הזוויות

המרכזיות הנשענות עליהן)

2) **לא נכון** -

$$\frac{DK}{\sin\beta}=2R \Rightarrow DK=2R\sin\beta\ ,\ \frac{KB}{\sin\alpha}=2R \Rightarrow$$

$$KB=2R\sin\alpha \Rightarrow \frac{DK}{KB}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\neq\frac{\beta}{\alpha}$$

ג. 1) $\frac{\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin\alpha}=0.7368 \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=0.7368 \Rightarrow \frac{DK}{KB}=0.7368$

$$\Rightarrow \sin(60^\circ-\alpha)=0.7368\cdot\sin\alpha \Rightarrow \sin60^\circ\cos\alpha-\cos60^\circ\sin\alpha=0.7368\cdot\sin\alpha$$

$$\Rightarrow 0.866\cos\alpha-0.5\sin\alpha=0.7368\cdot\sin\alpha \Rightarrow 0.866\cos\alpha=1.2368\cdot\sin\alpha$$

$\Rightarrow \mathbf{\beta=25^o} \Leftarrow \mathbf{\alpha=35^o} \Leftarrow 0.7 = \frac{0.866}{1.236} = \tan\alpha \Leftarrow$ מחלקים את אגפי המשוואה ב- $\cos\alpha$ .

אם $\cos\alpha=0$ אז גם $\sin\alpha=0$ בסתירה לנוסחה $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ , לכן $\cos\alpha\neq0$.

2) $DK=2R\sin25^\circ$ , $\sphericalangle AOD=60^\circ \Rightarrow \sphericalangle ACD=30^\circ \Rightarrow AD=2R\sin30^\circ=R$

$$\sphericalangle ADC=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ,\sphericalangle CDK=\frac{\sphericalangle COB+\sphericalangle BOK}{2}=\frac{60^\circ+70^\circ}{2}=\frac{130^\circ}{2}=65^\circ \Rightarrow \sphericalangle ADK=125^\circ$$

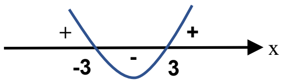
$$S_{\Delta ADK}=\frac{R\cdot2R\sin25^\circ\cdot\sin125^\circ}{2}=0.34619R^2=34.619 \Rightarrow R^2=100 \Rightarrow \mathbf{R=\ 10}$$

# פתרון שאלה מס' 6

א.1) $\frac{4x^2-16x+20}{x^2-9} \geq 0$ . נמצא את נקודות האפס של המונה ושל המכנה:

$\Rightarrow x^2-4x+5=0 \Rightarrow \Delta=-4 \Rightarrow$ . אין פתרון למשוואה. זאת פרבולה חיובית לכל ערך של x .

$x^2-9=0 \Rightarrow x_1=3, x_2=-3$ . סימני השבר נקבעים על-ידי סימני המכנה שנקבעים על-ידי תחומי החיוביות והשליליות של הפרבולה $y=x^2-9$ .




| | x < | -3 | < x < | 3 | < x |
|---|---|---|---|---|---|
| מונה | + | + | + | + | + |
| מכנה | + | 0 | - | 0 | + |
| שבר | + | | - | | + |

תחום ההגדרה של הפונקציה : **x < - 3 או x > 3**

2) $4x^2-16x+20 \neq 0$ לכל ערך של x , לכן הישרים **x = 3** ו- **x = - 3** אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x .

$x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to \sqrt{\frac{4x^2}{x^2}} \to \sqrt{4}=2$ לכן הישר **y = 2** אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x .

ב. 1) על פי גרף הנגזרת $f'(x)$ :

| x | x < | -3 | < x < | 3 | < x < | 5.3 | < x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | + | | | | - | 0 | + |
| f(x) | ↗ | | | | ↘ | min | ↗ |

$f(5.3)=1.58$ לכן הנקודה **(5.3;1.58) היא נקודת מינימום** של הפונקציה

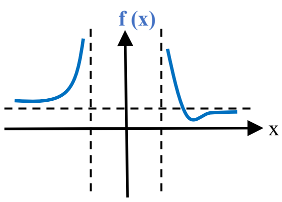
2) נקודות חיתוך עם ציר ה- x : $\sqrt{\frac{4x^2-16x+20}{x^2-9}}=0 \Rightarrow 4x^2-16x+20=0$

אין פתרון למשוואה, לכן **אין** נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

נקודת חיתוך עם ציר ה- y : אין פתרון (x = 0 לא בתחום ההגדרה).

לכן, **אין** לפונקציה f(x) נקודות חיתוך עם הצירים .

(3




ג. 1) $g(x)=[f(x)]^2 \Rightarrow \mathbf{g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)}$

2) הפונקציה g(x) מוגדרת בתחום בו מוגדרות f(x) ו- f '(x) : **x < - 3 או x > 3**

$g'(x)=0 \Rightarrow 2f(x)\cdot f'(x)=0$ . היות והפונקציה $f(x)$ חיובית בכל תחום הגדרתה , מקבלים

$g'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=5.3$ . מתקבלת הנקודה $(5.3;2.496)$.

סימני הנגזרת $g'(x)$ זהים לסימני $f'(x)$ , לכן הנקודה **$(5.3;2.496)$ היא נקודת מינימום** של הפונקציה $g(x)$ . **תחום העלייה : $x > 5.3$ , $x < -3$ ; תחומי הירידה $3 < x < 5.3$ .**

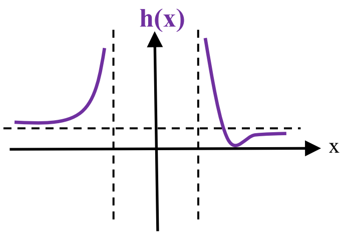
3) אסימפטוטות מאונכות לציר ה- $x$ : **$x = 3$** ו- **$x = -3$** ; אסימפטוטה מקבילה לציר ה- $x$ :

$x \to \pm\infty \Rightarrow g(x) \to \frac{4x^2}{x^2} \to 4$ . הישר **$y = 4$** הנו אסימפטוטה לגרף הפונקציה $g(x)$ .

ד. 1) הפונקציה $h(x)$ היא הזזה אנכית של גרף הפונקציה $g(x)$. הנקודה $(5.3;2.496)$ היא הנקודה היחידה על גרף הפונקציה $g(x)$ שבה $g'(x)=0$ , לכן , הנקודה $(5.3;0)$ היא נקודת ההשקה של הפונקציה עם ציר ה- $x$ . מקבלים : **$k = 2.496$**.

2) האסימפטוטות המאונכות לציר ה- $x$ : **$x = 3$ , $x = -3$**

3) אסימפטוטה מאונכת לציר ה- $y$ : $y = 4-2.496 \Rightarrow$ **$y = 1.504$**




ה. 1) תחום ההגדרה של הפונקציה $j(x)=\frac{1}{h(x)}$ :

על פי תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ : $x > 3$ , $x < -3$

וגם $h(x) \neq 0 \Leftarrow x \neq 5.3$ . מקבלים : **$x < -3$ , $3 < x < 5.3$ , $x > 5.3$**

2) נקודות ריקות $x \to \pm 3 \Rightarrow h(x) \to \infty \Rightarrow j(x) \to 0 \Rightarrow (-3;0),(3;0)$

**אסימפטוטה** $x \to 5.3 \Rightarrow h(x) \to 0^+ \Rightarrow j(x) \to \infty \Rightarrow$ **$x = 5.3$**

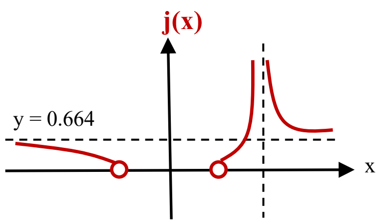
**אסימפטוטה** $x \to \pm\infty \Rightarrow h(x) \to 1.504 \Rightarrow j(x) \to \frac{1}{1.504} = 0.664 \Rightarrow \infty \Rightarrow$ **$y = 0.664$**

3) תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $j(x)$ הפוכים לאלה של הפונקציה $h(x)$

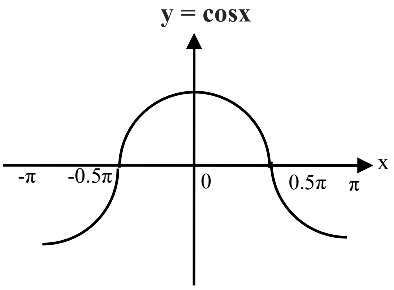
כי סימני הנגזרת $j'(x) = -\frac{h'(x)}{h^2(x)}$ הפוכים.

תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $j(x)$ זהים לאלה של הפונקציה $h(x)$ .

מתקבל הגרף:



## פתרון שאלה מס' 7




א. f(x) : תחום ההגדרה : על פי גרף הפונקציה y = cosx :

$$\Leftarrow -\frac{\pi}{2}+2\pi k < x < \frac{\pi}{2}+2\pi k \Leftarrow \cos x > 0$$

בתחום $-\pi < x < \pi$ מקבלים $\mathbf{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}}$

g(x) : תחום ההגדרה : $\mathbf{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}} \Leftarrow \cos x > 0 \Leftarrow \frac{\sin^2 x}{\cos x} \ge 0$

ב. 1) על פי תחומי החיוביות והשליליות של הנגזרות:

$f'(x) > 0$ בכל תחום ההגדרה , לכן **f(x) עולה בתחום** $\mathbf{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}}$

$g'(x) > 0$ בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ו- $g'(x) < 0$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ , לכן ,

הפונקציה **g(x) עולה בתחום** $\mathbf{0 < x < \frac{\pi}{2}}$ **ויורדת בתחום** $\mathbf{-\frac{\pi}{2} < x < 0}$

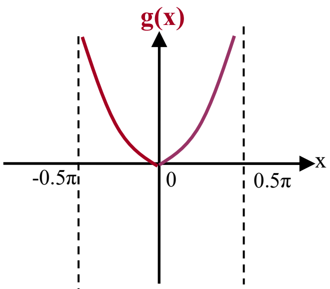
2) על פי תחומי העלייה והירידה של הפונקציות $f'(x)$ ו- $g'(x)$ :

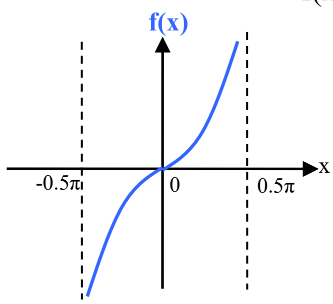
**f(x) קעורה כלפי מעלה בתחום** $\mathbf{0 < x < \frac{\pi}{2}}$ **וקעורה כלפי מטה בתחום** $\mathbf{-\frac{\pi}{2} < x < 0}$ **,**

**g(x) קעורה כלפי מעלה בכל תחום הגדרתה**

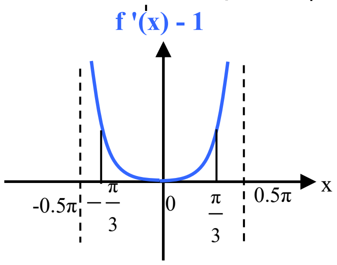
3) הערך המינימלי של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא 1 , לכן , ישר ששיפועו 0.8 **לא** יכול להיות משיק לגרף הפונקציה f(x)

ג. מתקבלים הגרפים:




ד. הגרף של הפונקציה $f'(x) - 1$:




מקבלים: $$S = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [f'(x) - 1]\,dx = [f(x) - x]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \mathbf{0.355}$$

ה. על פי הנתונים בגרף הפונקציה $g'(x)$ , מקבלים:

נקודה "ריקה" $x \to -\frac{\pi}{2} \Rightarrow g'(x) \to -\infty \Rightarrow k(x) \to 0 \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{2};0\right)$

נקודה "ריקה" $x \to 0^- \Rightarrow g'(x) \to -1 \Rightarrow k(x) \to -1 \Rightarrow (0;-1)$

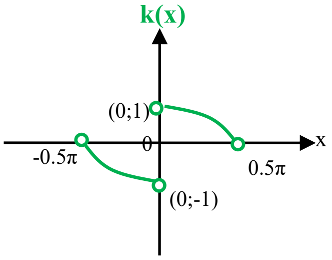
נקודה "ריקה" $x \to 0^+ \Rightarrow g'(x) \to 1 \Rightarrow k(x) \to 1 \Rightarrow (0;1)$

הפונקציה נקודה "ריקה" $x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow g'(x) \to \infty \Rightarrow k(x) \to 0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2};0\right)$

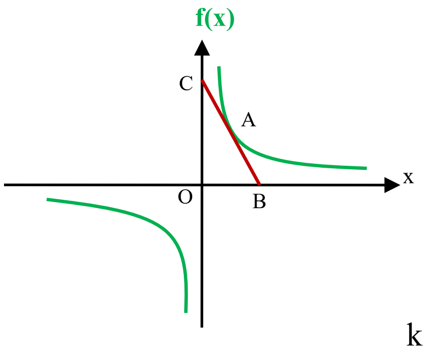
בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ $g'(x)$ שלילית ועולה , לכן $k(x)$ שלילית ויורדת

בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $g'(x)$ חיובית ועולה , לכן $k(x)$ חיובית ויורדת

מתקבל הגרף:




## פתרון שאלה מס' 8




א. 1) $x_A = t \Rightarrow y_A = \frac{k}{t} \Rightarrow A(t;\frac{k}{t})$

שיפוע המשיק BC :

$$m = f'(t)\ ,\ f'(x) = -\frac{k}{x^2} \Rightarrow f'(t) = -\frac{k}{t^2} \Rightarrow$$

משוואת המשיק BC :

$$y - \frac{k}{t} = -\frac{k}{t^2}(x-t) \Rightarrow y - \frac{k}{t} = -\frac{k}{t^2}\cdot x + \frac{k}{t} \Rightarrow y = -\frac{k}{t^2}\cdot x + \frac{2k}{t}$$

שיעורי הנקודה B :

$$0 = -\frac{k}{t^2}\cdot x + \frac{2k}{t} \Rightarrow 0 = -kx + 2kt \Rightarrow x = 2t \Rightarrow B(2t;0) \Rightarrow OB = 2t$$

שיעורי הנקודה C :

$$y = -\frac{k}{t^2}\cdot 0 + \frac{2k}{t} = \frac{2k}{t} \Rightarrow C(0;\frac{2k}{t}) \Rightarrow OC = \frac{2k}{t}$$

שטח המשולש BOC :

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}\cdot 2t \cdot \frac{2k}{t} = \mathbf{2k}$$

2) היות ושטח המשולש קבוע , תלוי רק בפרמטר K ואינו תלוי בשיעורי הנקודה A , הרי **שאין** נקודה A מסוימת עבורה שטח המשולש מקסימלי.

ב. פונקציית המטרה:

$$y = BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{(2t)^2 + \left(\frac{2k}{t}\right)^2} = \sqrt{4t^2 + \frac{4k^2}{t^2}} \Rightarrow y = 2\sqrt{t^2 + \frac{k^2}{t^2}}$$

תחום ההגדרה של הפונקציה: $t > 0$.

$$y = 2\sqrt{t^2 + \frac{k^2}{t^2}} \Rightarrow y' = 2 \cdot \frac{2t - \frac{2t \cdot k^2}{t^4}}{2\sqrt{t^2 + \frac{k^2}{t^2}}} = \frac{2t^5 - 2t \cdot k^2}{t^4\sqrt{t^2 + \frac{k^2}{t^2}}} \Rightarrow y' = \frac{2t(t^4 - k^2)}{t^4\sqrt{t^2 + \frac{k^2}{t^2}}} = 0$$

$$\Rightarrow 2t(t^4 - k^2) = 0 \Rightarrow t = 0, t^4 = k^2 \Rightarrow t = \pm\sqrt{k}$$

$$t > 0 \Rightarrow t = \sqrt{k}$$

| t | 0 | $< t <$ | $\sqrt{k}$ | $< x$ |
|---|---|---|---|---|
| y' | | - | 0 | + |
| y | | ↘ | min | ↗ |

מקבלים : אורך הקטע BC מינימלי עבור $t = \sqrt{k}$ .

האורך המינימלי של הקטע BC :

$$y = BC = 2\sqrt{\sqrt{k}^2 + \frac{k^2}{\sqrt{k}^2}} = 2\sqrt{k + \frac{k^2}{k}} = 2\sqrt{2k} = 4 \Rightarrow \sqrt{2k} = 2 \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow \mathbf{k = 2}$$

# מבחן מס' 2

## פתרון שאלה מס' 1

א. (1

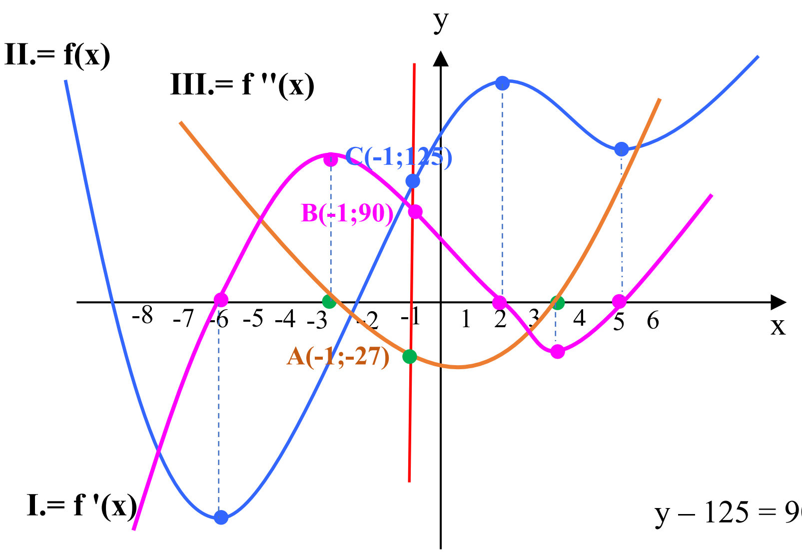
| x | x < | -6 | < x < | 2 | < x < | 5 | < x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| גרף I. | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |
| גרף II. | ↘ | מינימום | ↗ | מקסימום | ↘ | מינימום | ↗ |

| x | x < | -3 | < x < | 3.5 | < x |
|---|---|---|---|---|---|
| גרף III. | + | 0 | - | 0 | + |
| גרף I. | ↗ | מקסימום | ↘ | מינימום | ↗ |

על פי הממצאים:

**גרף I. מתאים להיות הגרף של $f'(x)$ , גרף II. – של $f(x)$ , גרף III. – של $f''(x)$**

(2 נתון: $f'(-1) = 90$ , $f''(-1) = -27$




לכן , שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f'(x)$ בנקודה $(-1;90)$ הוא $-27$.

משוואת המשיק :

$y - 90 = -27(x+1)$

מקבלים: $\mathbf{y = -27x + 63}$.

נתון: $f(-1) = 125$ ,

$f'(-1) = 90$ , לכן , שיפוע

המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה

$(-1;125)$ הוא $90$ .

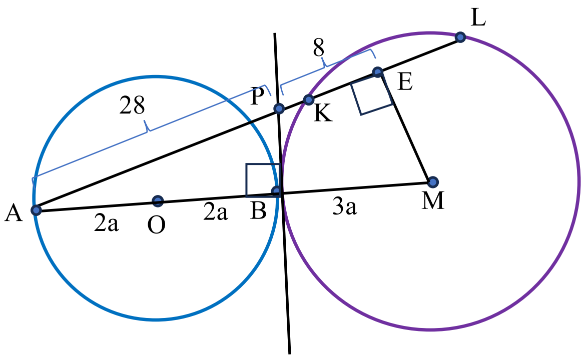
מקבלים: $y - 125 = 90(x+1) \Rightarrow \mathbf{y = 90x + 215}$

(3 הנקודה $P(\frac{1}{3};-32\frac{1}{3})$ היא נקודת המינימום המוחלט של הפונקציה $f''(x)$ . אם כן , השיפוע

המינימלי של המשיקים לגרף הפונקציה $f'(x)$ הוא $-32\frac{1}{3}$ ולכן : **לא** , אין משיק לגרף

הפונקציה I. , כלומר $f'(x)$ , ששיפועו $-40$.

**ב.** קטע המרכזים של שני מעגלים המשיקים מבחוץ




עובר דרך נקודת ההשקה B. רדיוס המעגל

מאונך למשיק , לכן $\sphericalangle ABP = 90^\circ$ .

הנקודה E היא אמצע המיתר KL של המעגל

שמרכזו M , לכן $\sphericalangle KEM = 90^\circ$ (קטע ממרכז

המעגל , החוצה את המיתר , מאונך למיתר)

1) $\sphericalangle A$ משותפת למשולשים ABP ו- AEM

$\Leftarrow$ $\Delta ABP \sim \Delta AEM$ על פי משפט דמיון זווית, זווית

$\Leftarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BP}{EM} = \frac{AP}{AM}$ (יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים) $\Leftarrow \frac{4a}{36} = \frac{28}{7a}$ (על פי הנתונים

שנרשמו בשרטוט) $\Leftarrow 28a^2 = 28 \cdot 36 \Leftarrow a^2 = 36 \Leftarrow$ $\mathbf{a = 6}$

2) יחס הדמיון בין המשולשים ABP ו- AEM הוא $\frac{AB}{AE} = \frac{4a}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ לכן :

$\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta AEM}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ (יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון)

$\Leftarrow$ אם נסמן $S_{\Delta ABP} = 4S$ נקבל $S_{\Delta AEM} = 9S \Leftarrow S_{PBME} = 5S \Leftarrow \frac{S_{\Delta AEM}}{S_{PBME}} = \mathbf{\frac{9}{5}}$

**ג.** המרחק שעובר בכל נפילה מהווה 80% מן המרחק שעבר בנפילה הקודמת והמרחק בכל התרוממות מהווה 80% מן המרחק בהתרוממות הקודמת. לכן , המרחק שעובר הכדור הוא סכום של שתי סדרות הנדסיות שהמנה של כל אחת מהן היא 0.8 . היות והתנועה נמשכת ללא הגבלת זמן , אפשר לחשב את סכום המרחקים בעזרת נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

המרחקים שעובר הכדור בנפילה: $a_1 = 40 \ , \ q = 0.8 \Rightarrow S_1 = \frac{40}{1-0.8} = 200$ מטר

המרחקים שעובר הכדור בהתרוממות מן הרצפה:

$b_1 = 0.8 \cdot 40 = 32 \ , \ q = 0.8 \Rightarrow S_2 = \frac{32}{1-0.8} = 160$ מטר

המרחק הכולל שיעבור הכדור : **360 מטר**

**ד.** נסמן ב- A את קבוצת התלמידים שנרשמו ללימוד גיטרה ונסמן ב- B את קבוצת התלמידים שנרשמו לחוג ללימוד ספרדית .

נתון: $P(A \cup B) = 0.88$ , $P(\bar{A} / \bar{B}) = \frac{2}{5}$ , $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

1) חישוב: $P(A \cup B) = 0.88 \Rightarrow 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.88 \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.12$

$$P(\bar{A}/\bar{B})=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{0.12}{P(\bar{B})}=\frac{2}{5}\Rightarrow P(\bar{B})=0.3\Rightarrow P(B)=0.7\Rightarrow$$

**70% מתלמידי בית הספר נרשמו לחוג ללימוד ספרדית**

2) נסמן ב- x את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שנרשם ללימוד גיטרה. מקבלים:

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | $x-0.18$ | | 0.7 |
| $\bar{B}$ | 0.18 | 0.12 | 0.3 |
| | $x$ | $1-x$ | 1 |

$$P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)\Rightarrow 0.7x=x-0.18\Rightarrow 0.3x=0.18\Rightarrow x=0.6\Rightarrow$$

**60%** מתלמידי ביה"ס נרשמו לחוג ללימוד גיטרה

3)

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0.42 | 0.28 | 0.7 |
| $\bar{B}$ | 0.18 | 0.12 | 0.3 |
| | 0.6 | 0.4 | 1 |

ההסתברות לבחור תלמיד שנרשם ללימוד ספרדית מקרב התלמידים שלא נרשמו ללימוד גיטרה:

$$P(B/\bar{A})=\frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{0.28}{0.4}=0.7$$

ההסתברות לבחור תלמיד שנרשם ללימוד ספרדית מקרב התלמידים שנרשמו ללימוד גיטרה:

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.42}{0.6}=0.7\Rightarrow P(B/A)=P(B/\bar{A})\Rightarrow$$

**הטענה אינה נכונה (אין תלות)**

# פתרון שאלה מס' 2

א. 1) נסמן ב- q את מנת הסדרה $a_1, a_2, a_3, .....$ . נקבל: $A = \frac{a_1(q^9-1)}{q-1}$

נתבונן בסדרה $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, ....$ . האיבר הכללי של הסדרה הוא $b_n = \frac{1}{a_n}$ . מקבלים:

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{1} = \frac{a_n}{a_n \cdot q} = \frac{1}{q}$ . לכן , הסדרה הנדסית ומנתה $\frac{1}{q}$.

נתון: $B = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} .... + \frac{1}{a_9}$ . ניתן גם לרשום: $B = \frac{1}{a_9} + \frac{1}{a_8} + \frac{1}{a_7} .... + \frac{1}{a_1}$ .

במקרה זה , מתקבלת סדרה הנדסית שבה האיבר הראשון הוא $\frac{1}{a_9}$ והמנה היא

$\frac{a_9}{a_8} = q$ . $\frac{1}{a_8} : \frac{1}{a_9}$ מקבלים: $B = \frac{\frac{1}{a_9}(q^9-1)}{q-1} = \frac{(q^9-1)}{a_9(q-1)}$ .

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{a_1(q^9-1)}{q-1} \cdot \frac{a_9(q-1)}{(q^9-1)} = a_1 \cdot a_9$$

2) נתון : $\frac{A}{B} = 256 \Leftarrow a_1 \cdot a_9 = 256 \Leftarrow a_1 \cdot a_1 \cdot q^8 = 256 \Leftarrow a_1^2 q^8 = 256 \Leftarrow$

$$\left(a_1 q^4\right)^2 = 256 \Rightarrow a_1 q^4 = \pm 16 \Rightarrow \mathbf{a_5 = \pm 16}$$

ב. 1) $a_1 = -\frac{1}{16} \Leftarrow -\frac{1}{16} \cdot q^4 = \pm 16 \Leftarrow$ האפשרויות:

$-\frac{1}{16} \cdot q^4 = 16 \Leftarrow q^4 = -256 \Leftarrow$ אין פתרון

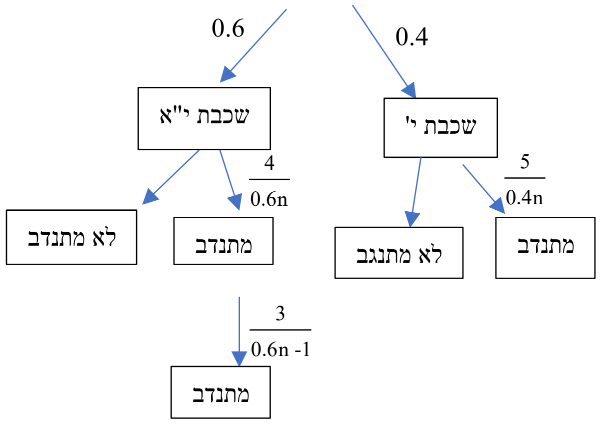
$-\frac{1}{16} \cdot q^4 = -16 \Leftarrow q^4 = 256 \Leftarrow q = \pm 4 \Leftarrow$

מנת הסדרה $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, ...$ היא $\pm\frac{1}{4}$ , לכן, הסדרה **מתכנסת.**

2) הסדרה $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, ...$ אינה עולה ואינה יורדת , לכן המנה היא $-\frac{1}{4}$ .

מקבלים: $\frac{4}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \frac{4}{a_3} + .... = 4\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ....\right) = 4 \cdot \frac{\frac{1}{a_1}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = 4 \cdot \frac{-16}{\frac{5}{4}} = \mathbf{-51.2}$

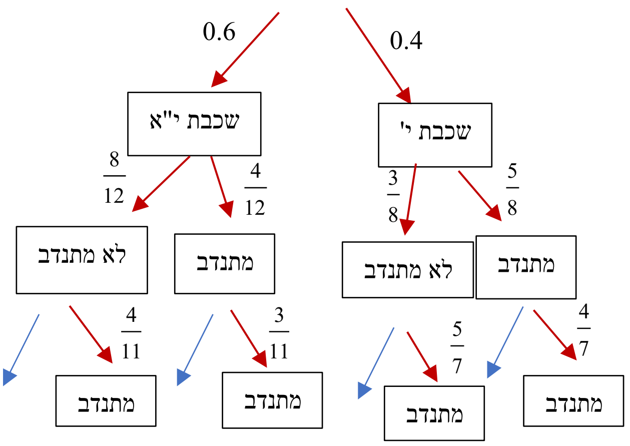
# פתרון שאלה מס' 3




א. מבין n חברי מועצת התלמידים ,
0.4n הם משכבת י' ו- 0.6n הם
משכבת י"א .
ארגון הנתונים בדיאגרמת עץ:
מקבלים:

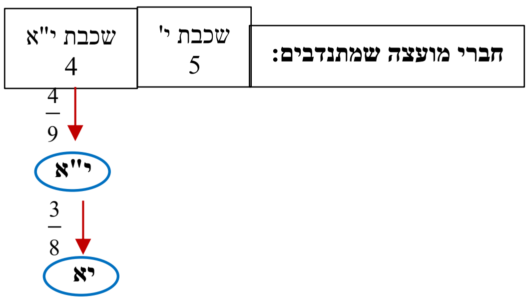
$$\frac{4}{0.6n}\cdot\frac{3}{0.6n-1}=\frac{1}{11}\Rightarrow\frac{12}{0.36n^2-0.6n}=\frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow 0.36n^2-0.6n=132\Rightarrow \mathbf{n=20}$$

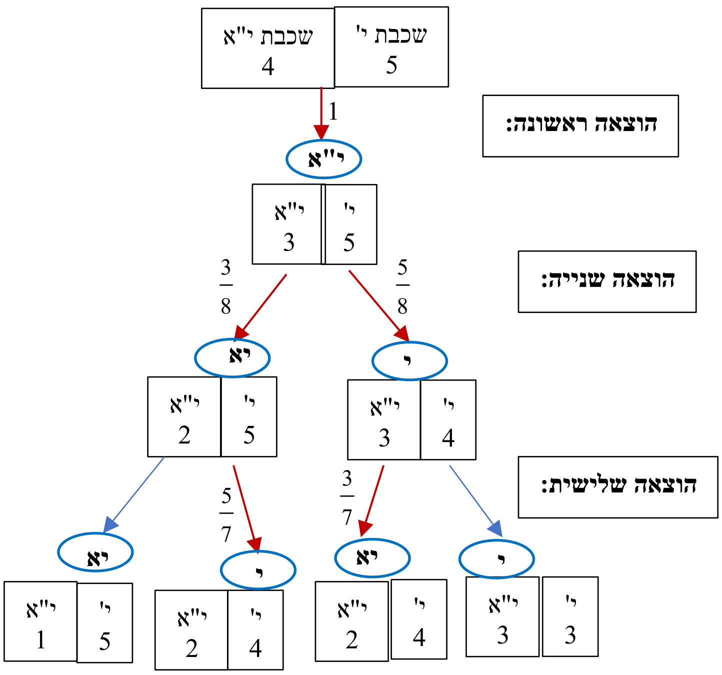



ב. בשכבת י' ישנם $0.4\cdot 20=8$ חברים במועצת התלמידים ובשכבת י"א ישנם 12 חברי מועצת התלמידים. ההסתברות לבחור, בזה אחר זה , שני חברי מועצת התלמידים שמתנדבים בקהילה (שניהם משכבת י' : הראשון וגם השני מתנדבים + הראשון לא מתנדב והשני מתנדב + שניהם משכבת י"א : הראשון וגם השני מתנדבים + הראשון לא מתנדב והשני מתנדב)

$$p_1=0.4\cdot\left(\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\right)+0.6\left(\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}+\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}\right)=\mathbf{\frac{9}{20}=0.45}$$




ג. חישוב הסתברות מותנית:
התנאי: שני תלמידים מתנדבים בקהילה
הדרישה : לפחות אחד מהם תלמיד שכבת י', כלומר,
המשלים של ההסתברות לבחור , מבין המתנדבים בקהילה,
שני חברי מועצה משכבת י"א : חישוב: $1-\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\mathbf{\frac{5}{6}}$




ד. חישוב על פי דיאגרמת העץ:

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\mathbf{\frac{15}{28}}$$

ה. ההסתברות לבחור באקראי חבר מועצת

התלמידים שמתנדב בקהילה היא

$$\frac{9}{20}=0.45$$

נבחרו 5 תלמידים, עם החזרה:

שני הנבחרים הראשונים אינם

מתנדבים בקהילה ולפחות שניים

מתנדבים , לכן , שניים או שלושה

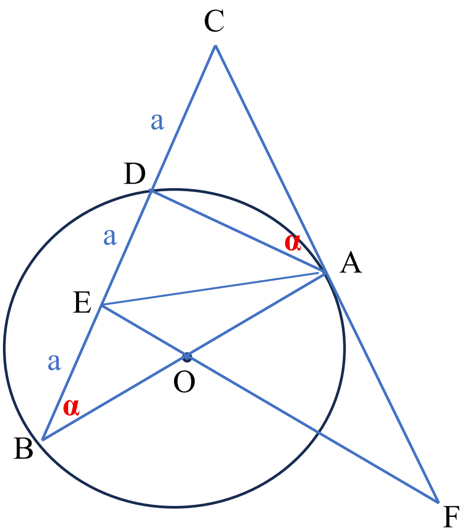
מן הנבחרים האחרים צריכים להיות

כאלה שמתנדבים. מקבלים:

$$0.55^2\cdot\left(P_3(2)+P_3(3)\right)=$$

$$=0.55^2\cdot\left[\binom{3}{2}\cdot0.45^2\cdot0.55+0.45^3\right]=\mathbf{0.1286}$$

## פתרון שאלה מס' 4




א. $\sphericalangle CAD=\sphericalangle CBA$ (זווית בין משיק למיתר)

$\sphericalangle C=\sphericalangle C$ (זווית משותפת)

$\Delta CAD\sim\Delta CBA\Leftarrow$ (משפט דמיון ז.ז.)

$\frac{CA}{CB}=\frac{AD}{BA}=\frac{CD}{CA}\Leftarrow$ (יחס צלעות מתאימות

במשולשים דומים)

$CA=\sqrt{3}a\Leftarrow(CA)^2=3a^2\Leftarrow\frac{CA}{3a}=\frac{a}{CA}\Leftarrow$

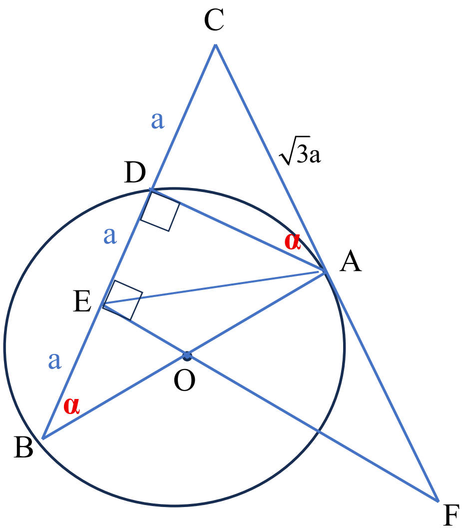
$\sphericalangle BDA=90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על

קוטר היא זווית ישרה)

$AC=\mathbf{AE=\sqrt{3}a}\Leftarrow$ (במשולש ACE)

התיכון לצלע CE מתלכד עם הגובה לצלע CE

לכן המשולש שווה-שוקיים.




ב. במשולש ישר הזווית ADC מקבלים:

$AD = \sqrt{3a^2 - a^2} = \sqrt{2}a$ (משפט פיתגורס)

הנקודה E היא אמצע המיתר BD לכן

מתקיים: $OE \perp BD$ (קטע המחבר את מרכז

המעגל עם אמצע המיתר מאונך למיתר)

$\Leftarrow \measuredangle OED = 90^\circ \Leftarrow OE \parallel AD$ (ישרים שיוצרים

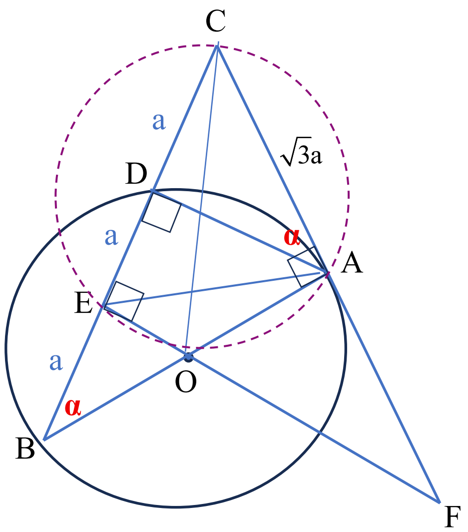
זוויות חד-צדדיות שסכומן $180^\circ$ מקבילים)

$\Leftarrow AD$ קטע אמצעים במשולש CEF (קטע שיוצא

מאמצע צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה

הוא קטע אמצעים במשולש)

$\Leftarrow \mathbf{EF} = 2AD = \mathbf{2\sqrt{2}a}$




ג. $\measuredangle OAC = 90^\circ$ (רדיוס מאונך למשיק בנקודה ההשקה)

$\measuredangle OAC + \measuredangle OEC = 180^\circ \Leftarrow$ המרובע AOEC בר חסימה

(מרובע בעל זוג זוויות נגדיות שסכומן

$180^\circ$ הוא מרובע בר-חסימה)

$\Leftarrow$ OC קוטר המעגל החוסם את המרובע (מיתר עליו

נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר)

(E אמצע BD ו- O אמצע AB, לכן

EO קטע אמצעים במשולש ABD ולכן:

$EO = \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ (אורך קטע האמצעים

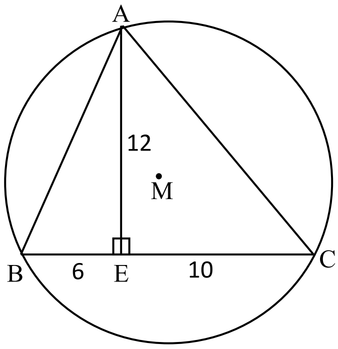
הוא חצי מאורך הצלע שאינו חוצה)

$\Leftarrow$ במשולש ישר הזווית COE מקבלים:

$CO^2 = CE^2 + EO^2 = (2a)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = 4.5a^2 \Rightarrow CO = \sqrt{4.5}a$ (משפט פיתגורס)

$CO = 2R \Rightarrow R = \mathbf{\frac{3\sqrt{2}}{4}a}$

# פתרון שאלה מס' 5




א. $S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2} \Rightarrow 96 = \frac{16 \cdot AE}{2} \Rightarrow AE = 12$

במשולש ישר הזווית ABE :

$\tan \sphericalangle BAE = \frac{6}{12} = 0.5 \Rightarrow \sphericalangle BAE = 26.565^\circ$

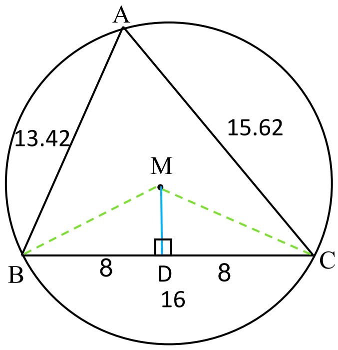
במשולש ישר הזווית ACE :

$\tan \sphericalangle CAE = \frac{10}{12} \Rightarrow \sphericalangle CAE = 39.805^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle BAC = 26.565^\circ + 39.805^\circ = 66.37^\circ$

במשולש ABC החסום במעגל M :

$$\frac{BC}{\sin(66.37^\circ)} = 2R \Rightarrow \frac{16}{\sin(66.37^\circ)} = 2R \Rightarrow R = \mathbf{8.73}$$




ב. בניית עזר : $MD \perp BC$ . במשולש MBC:

$MB = MC = 8.73$ (רדיוסים)

$BD = DC = 8$ ( הגובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים

הוא גם תיכון לבסיס)

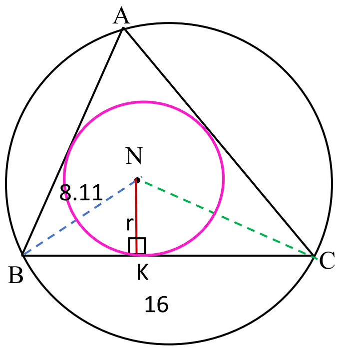
$\Rightarrow MD = \sqrt{8.73^2 - 8^2} = \mathbf{3.49}$

ג. 1) מרכז המעגל החסום במשולש נמצא בנקודת מפגש חוצי הזוויות

של המשולש . חישוב שאר זוויות המשולש ABC:

במשולש ABE :

$AB = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180}$ . מקבלים:




$$\frac{AB}{\sin \sphericalangle C} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{180}}{\sin \sphericalangle C} = 17.46 \Rightarrow \sphericalangle C = 50.21^\circ \Rightarrow \sphericalangle B = 63.42^\circ$$

N מרכז המעגל החסום במשולש . בניית עזר : $NK \perp BC \Leftarrow$

NK הוא רדיוס המעגל החסום במשולש .

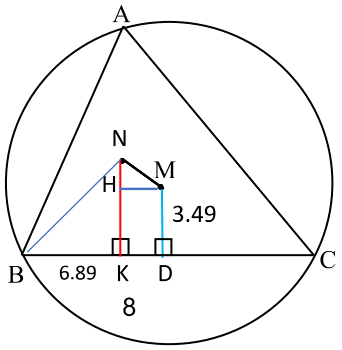
במשולש BNC :

$$\sphericalangle NBC = \frac{63.42^\circ}{2} = 31.71^\circ, \sphericalangle NCB = \frac{50.21^\circ}{2} = 25.105^\circ \Rightarrow \sphericalangle BNC = 123.185^\circ$$

$$\frac{16}{\sin(123.185^\circ)} = \frac{NB}{\sin(25.105^\circ)} \Rightarrow NB = 8.11 \Rightarrow$$

במשולש ישר הזווית NBK : $\sin(31.715^\circ) = \frac{r}{8.11} \Rightarrow r = \mathbf{4.26}$

2) בניית עזר: $NK \perp MH$. מקבלים: $NH = 4.26 - 3.49 = 0.771$




במשולש NBK :

$$\tan(31.71^\circ) = \frac{NK}{BK} \Rightarrow \tan(31.71^\circ) = \frac{NK}{BK} \Rightarrow$$

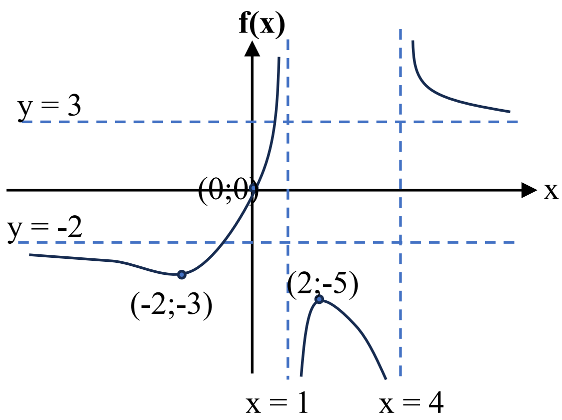
$$\tan(31.71^\circ) = \frac{4.26}{BK} \Rightarrow BK = 6.89 \Rightarrow KD = 8 - 6.89 = 1.11$$

במשולש NHM :

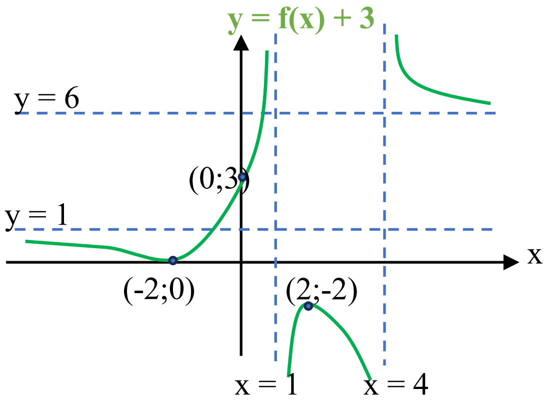
מקבלים: $MN^2 = 0.771^2 + 1.11^2 \Rightarrow MN = \mathbf{1.35}$

# פתרון שאלה מס' 6

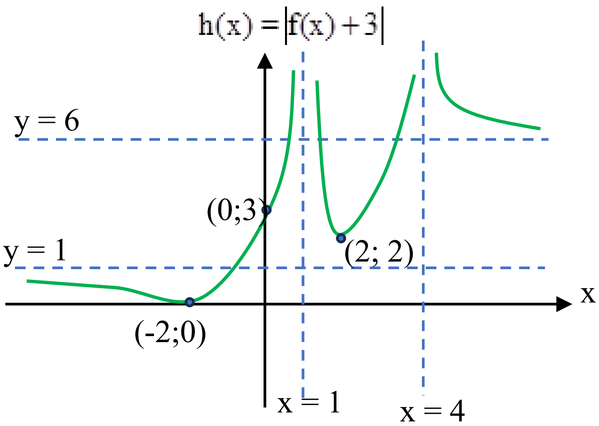
נסמן את הנתונים בשרטוט של גרף הפונקציה f(x) :




הפונקציה $y = f(x) + 3$ היא הזזה אנכית של f(x)
ב-3 יחידות כלפי מעלה , לכן מתקבל הגרף:




גרף פונקציית הערך המוחלט של הפונקציה $y = f(x) + 3$ :
על סמך הנתונים הרשומים בגרף הפונקציה $h(x) = |f(x)+3|$




ניתן לקבוע לגבי הפונקציה $g(x) = \frac{1}{h(x)}$ :

1) **תחום ההגדרה :**

$\mathbf{x < -2 \,,\, -2 < x < 1 \,,\, 1 < x < 4 \,,\, x > 4}$

2) $h(-2) = 0$ , לכן, הישר $\mathbf{x = -2}$
אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x .

$x \to -\infty \Rightarrow h(x) \to 1, \ \Rightarrow g(x) \to 1$

$x \to \infty \Rightarrow h(x) \to 6 \Rightarrow g(x) \to \frac{1}{6}$

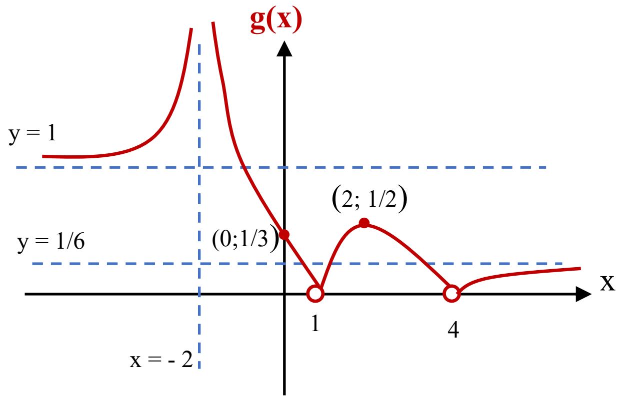
הישרים $\mathbf{y = 1}$ ו- $\mathbf{y = \frac{1}{6}}$ אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y .

3) $x \to 1 \Rightarrow h(x) \to \infty \Rightarrow g(x) \to 0 \Rightarrow$
$x \to 4 \Rightarrow h(x) \to \infty \Rightarrow g(x) \to 0 \Rightarrow$
הנקודות **(1;0)** ו- **(4;0)** הן נקודות אי- רציפות של הפונקציה $g(x)$.

4) $g(x) = \frac{1}{h(x)} \Rightarrow g'(x) = -\frac{h'(x)}{(h(x))^2}$, לכן תחומי העלייה והירידה של $g(x)$ הפוכים לאלה של $h(x)$. נקודת הקיצון היחידה של $g(x)$ מתקבלת בנקודה שבה $x = 2$, $g(2) = \frac{1}{h(2)} = \frac{1}{2}$,

לכן: $\left(2;\frac{1}{2}\right)$ **נקודת מקסימום** של $g(x)$

5) תחומי החיוביות והשליליות של $g(x)$ זהים לאלה של $h(x)$, לכן מתקבל הגרף:




## פתרון שאלה מס' 7

א. 1) אין אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y בתחום $0 \le x \le \pi$.

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x מתקבלות בנקודות שהן פתרונות המשוואות $\sin x = 0$ ו- $\cos x = 0$ בתחום הנתון:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k\ ,\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

הפתרונות בתחום $0 \le x \le \pi$ : $\mathbf{x = 0\ ,\ x = \frac{\pi}{2}\ ,\ x = \pi}$

2) הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$ לכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y.

חיתוך עם ציר ה- x :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \frac{\sqrt{2}}{\cos x} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}(\cos x + \sin x)}{\sin x \cos x} = 0 \Rightarrow \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow$$

$\cos x \ne 0$ (אם $\cos x = 0$ אז $\sin^2 x = 1$ לכן $\cos x + \sin x \ne 0$) ונוכל לחלק את אגפי המשוואה ב-$\cos x$ :

$$1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow 1 + \tan x = 0 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

הפתרון היחיד בתחום $0 \le x \le \pi$ הוא $x = \frac{3\pi}{4}$. מתקבלת הנקודה $\left(\mathbf{\frac{3\pi}{4};0}\right)$

3) $f'(x) = -\frac{\sqrt{2}\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sqrt{2}\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sqrt{2}\left(\sin^3 x - \cos^3 x\right)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 0 \Rightarrow$

$$\sin^3 x = \cos^3 x \Rightarrow \tan^3 x = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

הפתרון היחיד בתחום $0 \le x \le \pi$ : $x = \frac{\pi}{4}$.

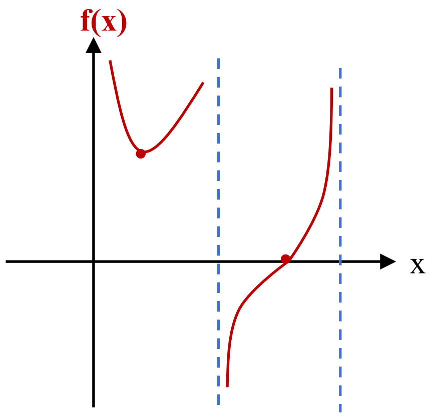
| x | 0 | $< x <$ | $\frac{\pi}{4}$ | $< x <$ | $\frac{\pi}{2}$ | $< x <$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | min | ↗ | | ↗ | |

תחומי העלייה : $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$

תחום הירידה : $0 < x < \frac{\pi}{4}$

4) **נקודת מינימום** $f(\frac{\pi}{4}) = 4 \Rightarrow (\frac{\pi}{4};4)$

5)

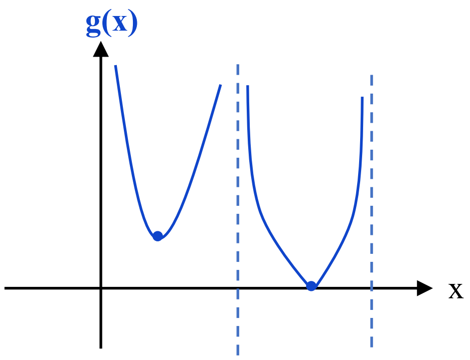



ב. 1) גרף הפונקציה $g(x) = \left|\frac{f(x)}{4}\right|$ :

נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ :

**מינימום** $(\frac{\pi}{4};1)$ , **מינימום** $\left(\frac{3\pi}{4};0\right)$

2)




ג. 1) תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x) = \sqrt{\frac{1}{f(x)}}$ :

תחום החיוביות של הפונקציה $f(x)$ : $0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} < x < \pi$

2) נקודה "ריקה" $x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to \infty \Rightarrow h(x) \to 0 \Rightarrow \mathbf{(0;0)}$

נקודה "ריקה" $x \to \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow f(x) \to \infty \Rightarrow h(x) \to 0 \Rightarrow (\frac{\pi}{2};0)$

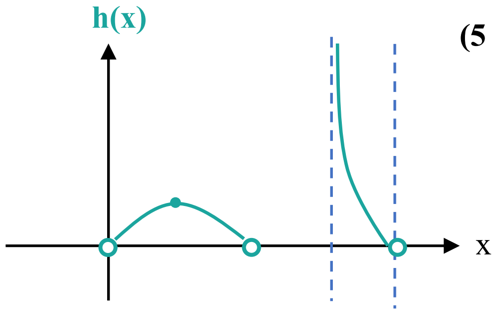
**אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x** $x \to \frac{3\pi}{4}^+ \Rightarrow f(x) \to 0 \Rightarrow h(x) \to \infty \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

נקודה "ריקה" $x \to \pi^- \Rightarrow f(x) \to \infty \Rightarrow h(x) \to 0 \Rightarrow \mathbf{(\pi;0)}$

3) $h(x) = \sqrt{\frac{1}{f(x)}} \Rightarrow h'(x) = \frac{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}}{2\sqrt{\frac{1}{f(x)}}} = -\frac{f'(x)}{2f^2(x)\sqrt{\frac{1}{f(x)}}}$

לכן $h(x)$ **עולה בתחום** $0<x<\frac{\pi}{4}$ **ויורדת בתחומים:** $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$ , $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$

4) בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$ יש לפונקציה $h(x)$ נקודת מקסימום




5) **נקודת מקסימום** $\left(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right) \Leftarrow h(\frac{\pi}{4})=\sqrt{\frac{1}{f(\frac{\pi}{4})}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

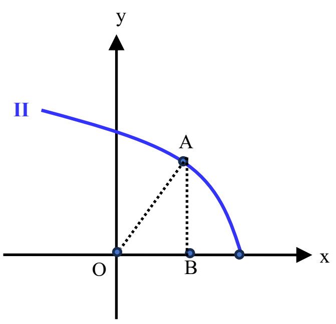
6) התחום $0.6\le x\le 1.2$ נמצא בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$ .

בתחום זה ערכי הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ מקיימים

$0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{4}$ , לכן ערכי הפונקציה $\sqrt{\frac{1}{f(x)}}$ גדולים מערכי הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ ולכן

הטענה הנכונה היא **טענה I.**

## פתרון שאלה מס' 8




א. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)=\sqrt{a-x}$ הוא :

$a-x\ge 0\Rightarrow x\le a$ .

תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)=\frac{1}{\sqrt{a-x}}$ הוא :

$a-x>0\Rightarrow x<a$ . הישר $x=a$ הוא אסימפטוטה

לגרף הפונקציה $g(x)$ . לכן , גרף II הנו גרף הפונקציה $f(x)$.

נסמן : $A(x;\sqrt{a-x})$ ונקבל : $OB=x$ , $AB=\sqrt{a-x}$ $\Leftarrow$ $S_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{a-x}$

מתקבלת הפונקציה $S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{a-x}$ . תחום ההגדרה של הפונקציה : $0<x<a$.

נמצא את נקודת המקסימום של הפונקציה:

$$S'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{a-x}+\frac{1}{2}x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{a-x}}{2}-\frac{x}{4\sqrt{a-x}}=\frac{2(a-x)-x}{4\sqrt{a-x}}\Rightarrow$$

$$S'(x)=\frac{2a-3x}{4\sqrt{a-x}}=0\Rightarrow 2a-3x=0\Rightarrow 3x=2a\Rightarrow x=\frac{2a}{3}$$

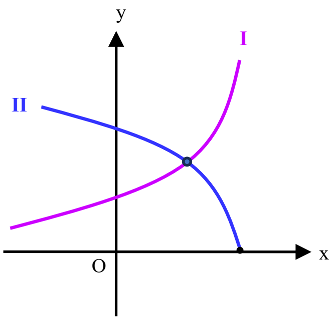
| x | 0 | $<x<$ | $\frac{2a}{3}$ | $<x<$ | A |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $S(x)$ | | ↗ | Max | ↘ | |

מקבלים: שטח המשולש ABO מקסימלי כאשר

$$x_A=\frac{2a}{3}\Rightarrow y_A=\sqrt{a-\frac{2a}{3}}=\sqrt{\frac{a}{3}}\Rightarrow \mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{2a}}{\mathbf{3}};\sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{3}}}\right)$$

ב. נקודת החיתוך של הפונקציות $f(x)=\sqrt{a-x}$

ו- $g(x)=\frac{1}{\sqrt{a-x}}$:




$$\sqrt{a-x}=\frac{1}{\sqrt{a-x}}\Rightarrow a-x=1\Rightarrow$$

$$x=a-1\Rightarrow y=\sqrt{a-a+1}=1\Rightarrow \mathbf{(a-1;1)}$$

ג. מקבלים: $x=a-1\Rightarrow \frac{2a}{3}=a-1\Rightarrow \frac{a}{3}=1\Rightarrow \mathbf{a=3}$