

## מבחן מס' 1

### פתרון שאלה מס' 1

$$\text{א. 1) נתון: } b_1 + b_2 + b_3 + 11 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 216$$

$$b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 = 216, \quad b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + 11 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d)$$

$$\text{לכן מתקבלות המשוואות: } a_1 = 1.5, \quad b_1 = 9$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot 9q \cdot 9q^2 = 216 \quad \text{ו-} \quad 9 + 9q + 9q^2 + 11 = 1.5 + (1.5 + d) + (1.5 + 2d) + (1.5 + 3d)$$

$$9 \cdot 9q \cdot 9q^2 = 216 \Rightarrow 729q^3 = 216 \Rightarrow q^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$9 + 9 \cdot \frac{2}{3} + 9 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 11 = 6 + 6d \Rightarrow 9 + 6 + 4 + 11 = 6 + 6d \Rightarrow 6d = 24 \Rightarrow d = 4$$

$$(2) \quad b_1 = 9, \quad q = \frac{2}{3} \quad \text{לכן זאת סדרה ההנדסית יורדת } (9, 6, 4, \dots)$$

ב. נסמן את מספר אברי הסדרה החשבונית ב-  $2n$ :  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ .

$$\text{נתון: } a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = 415$$

$$a_2 = a_1 + d = 1.5 + 4 = 5.5 \quad \text{האיבר הראשון בסדרה הזאת הוא:}$$

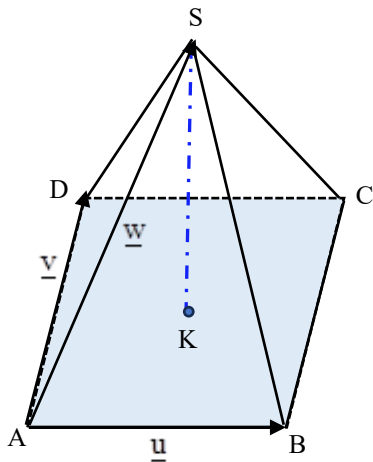
$$2d = 8 \quad \text{הפרש הסדרה הוא:}$$

מספר אברי הסדרה הוא:  $n$

$$\frac{n[2 \cdot 5.5 + (n-1) \cdot 8]}{2} = 415 \Rightarrow n(11 + 8n - 8) = 830 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8n^2 + 3n - 830 = 0 \Rightarrow n = 10 \Rightarrow 2n = 20 \Rightarrow$$

מספר אברי הסדרה החשבונית הוא **20**

פתרון שאלה מס' 2

א. 1) ABCD מעוין, לכן מתקיים:

$$|\underline{u}| = |\underline{v}|, \overline{AB} = \overline{DC} = \underline{u}, \overline{AD} = \overline{BC} = \underline{v}$$

(הצלעות הנגדיות במעוין מקבילות וכל הצלעות שוות)

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC} = \underline{u} + \underline{v}$$

$$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} \Rightarrow \overline{BD} = -\underline{u} + \underline{v}$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = (\underline{u} + \underline{v}) \cdot (-\underline{u} + \underline{v}) = (2$$

$$= -|\underline{u}|^2 + \underline{u} \cdot \underline{v} - \underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2 = -|\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$$

$$\overline{KS} = \overline{KA} + \overline{AS} = \frac{1}{2}\overline{CA} + \underline{w} = \frac{1}{2}(-\underline{v} - \underline{u}) + \underline{w} \Rightarrow (3$$

$$\overline{KS} = -\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}$$

ב. נתון:  $\underline{v} \cdot \underline{u} = 72$ ,  $|\underline{v}| = |\underline{u}| = 12$

$$\underline{v} \cdot \underline{u} = |\underline{v}| \cdot |\underline{u}| \cdot \cos \angle DAB \Rightarrow 72 = 12^2 \cdot \cos \angle DAB \Rightarrow \cos \angle DAB = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\angle DAB = \angle DCB = 60^\circ, \angle ABC = \angle ADC = 120^\circ$$

ג. 1) נתון:  $\overline{KS}$  מאונך למישור המעוין ABCD  $\overline{KS} \cdot \underline{v} = 0, \overline{KS} \cdot \underline{u} = 0$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}\right) \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}|\underline{u}|^2 - \frac{1}{2}\underline{v} \cdot \underline{u} + \underline{w} \cdot \underline{u} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 12^2 - \frac{1}{2} \cdot 72 + \underline{w} \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \underline{w} \cdot \underline{u} = 108$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}\right) \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\underline{u} \cdot \underline{v} - \frac{1}{2}|\underline{v}|^2 + \underline{w} \cdot \underline{v} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 72 - \frac{1}{2} \cdot 12^2 + \underline{w} \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{w} \cdot \underline{v} = 108$$

$$\cos \angle SAB = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{\overline{AS} \cdot \overline{AB}}{|\overline{AS}| \cdot |\overline{AB}|} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{\underline{w} \cdot \underline{u}}{|\underline{w}| \cdot |\underline{u}|} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow (2$$

$$\frac{108}{|\underline{w}| \cdot 12} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 12\sqrt{3} \cdot |\underline{w}| = 432 \Rightarrow |\underline{w}| = 12\sqrt{3}$$

3) נתון:  $KS = 18$ .  $\overline{KS}$  מאונך למישור המעוין ABCD

לכן KS הוא גובה הפירמידה.

שטח הבסיס הנו שטח המעוין ABCD:

$$S_{ABCD} = 12^2 \cdot \sin 60^\circ = 72\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{72\sqrt{3} \cdot 18}{3} = 432\sqrt{3}$$

### פתרון שאלה מס' 3

א. ההלוואה של יואב הייתה גבוהה יותר (75,000 ₪ לעומת 50,000 ₪), לכן החוב ההתחלתי גבוה יותר ובנוסף, קצב העלייה השנתי של החוב היה נמוך יותר (5% לעומת 8%) לכן:

גרף הפונקציה  $f(t)$  מתאימה ליואב וגרף הפונקציה  $g(t)$  מתאימה לעמוס.

ב. 1) קצב העלייה בהלוואה של יואב:  $q = \frac{100+5}{100} = 1.05$  וקצב העלייה בהלוואה של עמוס:

$$q = \frac{100+8}{100} = 1.08 \text{ מתחילת שנת 2020, אחרי 5 שנים:}$$

| $f(0)$ | $q$  | $t$ (שנים) | $f(t)$ (שקלים)                 |      |
|--------|------|------------|--------------------------------|------|
| 75,000 | 1.05 | 5          | $75,000 \cdot 1.05^5 = 95,721$ | יואב |
| 50,000 | 1.08 | 5          | $50,000 \cdot 1.08^5 = 73,466$ | עמוס |

(2)

| $f(0)$ | $Q$  | $t$ (שנים) | $f(t)$ (שקלים)        |      |
|--------|------|------------|-----------------------|------|
| 75,000 | 1.05 | $t$        | $75,000 \cdot 1.05^t$ | יואב |
| 50,000 | 1.08 | $t$        | $50,000 \cdot 1.08^t$ | עמוס |

$$75,000 \cdot 1.05^t = 50,000 \cdot 1.08^t \Rightarrow \frac{75,000}{50,000} = \frac{1.08^t}{1.05^t} \Rightarrow$$

$$1.5 = \left(\frac{1.08}{1.05}\right)^t \Rightarrow \left(\frac{36}{35}\right)^t = 1.5 \Rightarrow t = \frac{\ln(1.5)}{\ln\left(\frac{36}{35}\right)} = 14.4 \Rightarrow$$

כעבור יותר מ-14 שנים, כלומר, בתחילת השנה ה-15 מהקמת העסק,

**שהיא תחילת שנת 2030**

החוב של עמוס יהיה גבוה מזה של יואב.

(3) החוב כעבור 20 שנה:

| $f(0)$ | $q$  | $t$ (שנים) | $f(t)$ (שקלים)                     |      |
|--------|------|------------|------------------------------------|------|
| 75,000 | 1.05 | 20         | $75,000 \cdot 1.05^{20} = 198,997$ | יואב |
| 50,000 | 1.08 | 20         | $50,000 \cdot 1.08^{20} = 233,048$ | עמוס |

יואב יצטרך להחזיר 198,997 ₪, עמוס יצטרך להחזיר 233,048 ₪

$$50,000 \cdot q^{20} = 198,997 \Rightarrow q^{20} = 3.97994 \Rightarrow q = \sqrt[20]{3.97994} = 1.0715 \quad \text{ג. חישוב:}$$

$$1.0715 = \frac{100+p}{100} \Rightarrow p = 7.15\%$$

אילו קיבל עמוס את ההלוואה עם ריבית של 7.15% לשנה, היה מחזיר בסוף התקופה אותו סכום כמו יואב.

## פתרון שאלה מס' 4

א. (1) תחום ההגדרה:  $x \neq 0 \Rightarrow e^x - 1 \neq 0$

(2) משוואת האסימפטוטה לגרף הפונקציה המאונכת לציר ה- $x$ :  $x = 0$

(3) הפונקציה לא מוגדרת עבור  $x = 0$  לכן אין לה נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ .

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^{2x} + 3}{e^x - 1} = 0 \Rightarrow e^{2x} + 3 = 0 \Rightarrow e^{2x} = -3 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{אין פתרון למשוואה}$$

לכן, אין לפונקציה  $f(x)$  נקודות חיתוך עם הצירים.

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 3}{e^x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x - 1) - e^x(e^{2x} + 3)}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^{3x} - 2e^{2x} - e^{3x} - 3e^x}{(e^x - 1)^2} = (1 \text{ ב.})$$

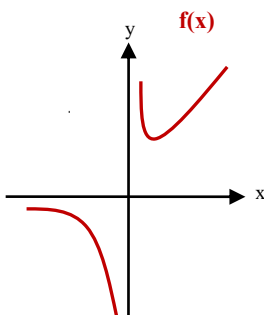
$$= \frac{e^{3x} - 2e^{2x} - 3e^x}{(e^x - 1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} - 2e^x - 3)}{(e^x - 1)^2} = 0 \Rightarrow e^x(e^{2x} - 2e^x - 3) = 0$$

נסמן:  $e^x = t$  ונקבל את המשוואה:  $t(t^2 - 2t - 3) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 3, t = -1$

מקבלים:  $e^x = 0$  אין פתרון,  $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$ ,  $e^x = -1$  אין פתרון

הפתרון היחיד  $x = \ln(3)$ .  $f(\ln 3) = 6$

| $x$     | $x < 0$    | $0$ | $0 < x < \ln 3$ | $\ln 3$ | $x > \ln 3$ |
|---------|------------|-----|-----------------|---------|-------------|
| $f'(x)$ | -          |     | -               | 0       | +           |
| $f(x)$  | $\searrow$ |     | $\searrow$      | min     | $\nearrow$  |

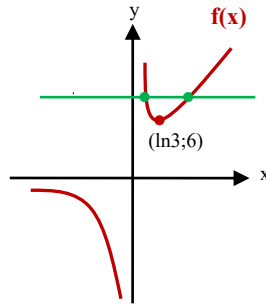


הנקודה  $(\ln 3; 6)$  היא נקודת מינימום של הפונקציה  $f(x)$

(2) תחום העלייה:  $x > \ln 3$ , תחומי הירידה:  $0 < x < \ln 3, x < 0$

$$f(x) = 7 \Rightarrow \frac{e^{2x} + 3}{e^x - 1} = 7 \quad \text{ג.}$$

א.מ. ספרי מתמטיקה



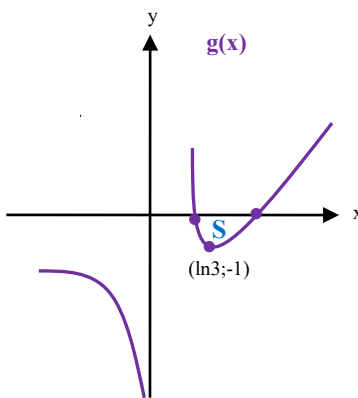
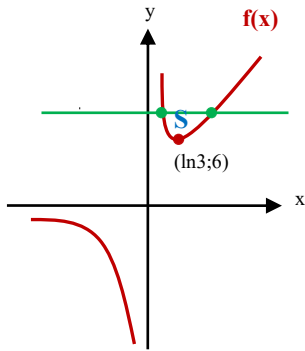
מתקבלות הנקודות  $(\ln 2; 7)$ ,  $(\ln 5; 7)$ .  $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$ ,  $e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5$

שאלון 35472 בעקבות הקלות מרץ 2026  
מבחנים קיץ תשפ"ו (2026) - פתרונות

נסמן:  $e^x = t$  ונקבל:

$$\frac{t^2 + 3}{t - 1} = 7 \Rightarrow t^2 + 3 = 7t - 7 \Rightarrow$$

$$t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow t = 2, t = 5 \Rightarrow$$



ד. גרף הפונקציה  $g(x)$  הוא הזזה

אנכית של גרף הפונקציה  $f(x)$

7 יחידות כלפי מטה. לכן,

נקודת המינימום של הפונקציה

$g(x)$  היא  $(\ln 3; -1)$ .

ציר ה- $x$ , כלומר הישר  $y = 0$

הוא הזזה אנכית של הישר  $y = 7$

ב-7 יחידות כלפי מטה.

לכן, השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $g(x)$  וציר ה- $x$  שווה לשטח  $S$  המוגבל בין גרף הפונקציה  $f(x)$

והישר  $y = 7$ , רק מוזז כלפי מטה.

## פתרון שאלה מס' 5

א. נתון:  $f(e+1) = 0$ . לכן מקבלים:

$$0 = \frac{\ln(e+1+a)}{e+1-e} \Rightarrow \ln(e+1+a) = 0 \Rightarrow e^0 = e+1+a \Rightarrow a = -e$$

$$f(x) = \frac{\ln(x-e)}{x-e}$$

$$f(x) = \frac{\ln(x-e)}{x-e} = 0 \Rightarrow \ln(x-e) = 0 \Rightarrow x-e = e^0 \Rightarrow x = e+1 \quad (1)$$

לכן: אין לפונקציה נקודת חיתוך נוספת עם ציר ה- $x$ .

(2) תחום ההגדרה:  $x - e > 0 \Rightarrow x > e$  וגם  $x - e \neq 0 \Rightarrow x \neq e$

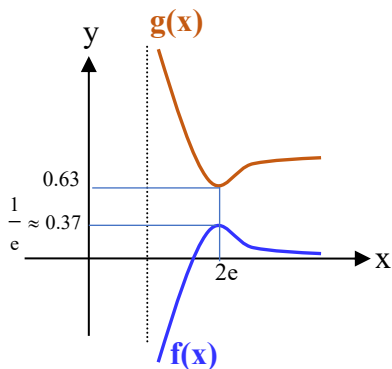
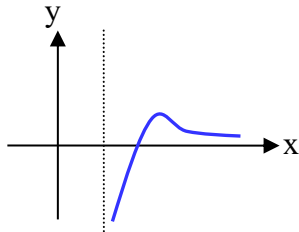
(3) הישר  $x = e$  הוא אסימפטוטה מאונכת לציר ה- $x$ .

$$f(x) = \frac{\ln(x-e)}{x-e} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{(x-e)} \cdot (x-e) - 1 \cdot \ln(x-e)}{(x-e)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln(x-e)}{(x-e)^2} \quad (4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln(x-e) = 0 \Rightarrow \ln(x-e) = 1 \Rightarrow$$

$$e = x - e \Rightarrow x = 2e \Rightarrow f(2e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

| X       | e | $x < e$    | $x > 2e$ | $x < 2e$   |
|---------|---|------------|----------|------------|
| $f'(x)$ |   | +          | 0        | -          |
| $f(x)$  |   | $\nearrow$ | Max      | $\searrow$ |



(5) מקבלים: נקודת מקסימום  $\left(2e; \frac{1}{e}\right)$

ג. גרף הפונקציה  $g(x) = -f(x) + 1$  המוגדרת

בתחום  $x > e$  היא שיקוף ביחס לציר ה- $x$

והזזה אנכית יחידה אחת כלפי מעלה של גרף

הפונקציה  $f(x)$ :

לפונקציה  $f(x)$  יש מקסימום מוחלט בנקודה

$(2e; 0.37)$  לכן, לפונקציה  $-f(x)$  יש מינימום

מוחלט בנקודה  $(2e; -0.37)$  ולפונקציה

$g(x) = -f(x) + 1$  יש מינימום מוחלט

בנקודה  $(2e; 0.63)$  שנמצאת מעל ציר ה- $x$ .

לגרף הפונקציה  $g(x)$  אין נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ .

ד. גרף הפונקציה  $h(x) = f(x + k)$  הוא הזזה אופקית של

גרף הפונקציה  $f(x)$ . נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  נמצאת בנקודה שבה  $x = 2e$

ואילו נקודת הקיצון של הפונקציה  $h(x)$  נמצאת בנקודה שבה  $x = 0$ , לכן, ההזזה היא

$2e$  יחידות שמאלה. מקבלים:  $k = 2e$

## מבחן מס' 2

### פתרון שאלה מס' 1

א. (1) ההוצאות היומיות של רן בחמשת ימי החופשה מהווים סדרה הנדסית  $a_1, a_2, \dots, a_5$

שמנתה  $q = 1.5$ . נתון  $S_5 = 2110$ . מקבלים:

$$2110 = \frac{a_1(1.5^5 - 1)}{1.5 - 1} \Rightarrow 2110 = \frac{a_1(1.5^5 - 1)}{0.5} \Rightarrow 1055 = a_1 \cdot \frac{211}{32} \Rightarrow a_1 = 160 \Rightarrow$$

ביום החופשה הראשון רן הוציא **160 ₪**.

(2) ביום החופשה האחרון רן הוציא **810 ₪**  $\Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4 = 160 \cdot 1.5^4 = 810$

ב. (1) התשלומים החודשיים על ההלוואה מהווים סדרה חשבונית יורדת  $b_1, b_2, b_3, \dots$ .

נתון:  $b_4 = b_2 - 110$ ,  $b_1 + b_2 + b_3 = 1665$ . מקבלים:

$b_1 + b_1 + d + b_1 + 2d = 1665$ ,  $b_1 + 3d = b_1 + d - 110$ . מתקבלות המשוואות:

$$3b_1 + 3d = 1665, 2d = -110 \Rightarrow$$

$$d = -55 \Rightarrow 3b_1 + 3 \cdot (-55) = 1665 \Rightarrow 3b_1 = 1830 \Rightarrow b_1 = 610 \Rightarrow$$

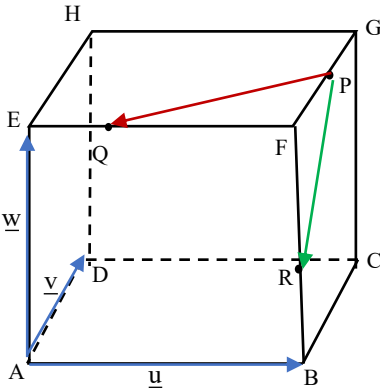
התשלום הראשון עבור ההלוואה היה **610 ₪**

$$S_n = 2110, n < 6 \Rightarrow 2110 = \frac{n[2 \cdot 610 + (n-1)(-55)]}{2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow 4220 = n(1220 - 55n + 55) \Rightarrow 4220 = n(1275 - 55n) \Rightarrow$$

$$0 = -55n^2 + 1275n - 4220 \Rightarrow n = 4 \quad (n < 6) \Rightarrow$$

רן השלים את התשלום עבור ההלוואה כעבור **4 חודשים**

פתרון שאלה מס' 2

א. נתון: נפח הקובייה הוא 729. אם נסמן את אורך כל אחד ממקצועות הקובייה ב-  $a$  נקבל:

$a = 9 \Leftrightarrow a^3 = 729$ . כל אחת מפאות הקובייה היא ריבוע לכן:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0, |\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 9$$

$$\overline{QR} = \overline{QF} + \overline{FR} = \frac{2}{3}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{w} = \frac{2}{3}(\underline{u} - \underline{w}) \quad (1)$$

$$\overline{HC} = \overline{HG} + \overline{GC} = \underline{u} - \underline{w} \Rightarrow \overline{QR} = \frac{2}{3}\overline{HC}$$

הווקטורים תלויים ואינם על אותו ישר, לכן הם מקבילים.

$$\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CG} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w} \Rightarrow (2)$$

$$\overline{QR} \cdot \overline{AG} = \frac{2}{3}(\underline{u} - \underline{w}) \cdot (\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) = \frac{2}{3}(|\underline{u}|^2 - |\underline{w}|^2) = \frac{2}{3}(9^2 - 9^2) = 0$$

$$\Rightarrow \overline{QR} \perp \overline{AG}$$

$$\cos \angle QPR = \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{PR}}{|\overline{PQ}| \cdot |\overline{PR}|} \quad (1) \quad \text{ב.}$$

$$\overline{PQ} = \overline{PF} + \overline{FQ} = \frac{1}{2}\overline{GF} + \frac{2}{3}\overline{FE} = -\frac{1}{2}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{u} \Rightarrow$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{u}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{u}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 9^2 + \frac{4}{9} \cdot 9^2} = \sqrt{56.25}$$

$$\overline{PR} = \overline{PF} + \overline{FR} = \frac{1}{2}\overline{GF} + \frac{2}{3}\overline{FB} = -\frac{1}{2}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w} \Rightarrow$$

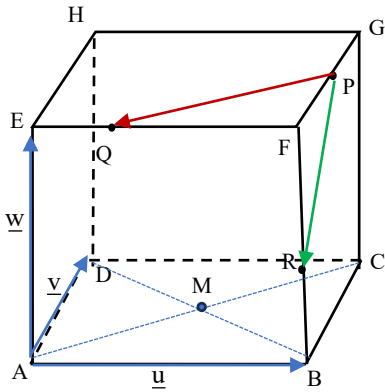
$$|\overline{PR}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 9^2 + \frac{4}{9} \cdot 9^2} = \sqrt{56.25}$$

$$\Rightarrow \cos \angle QPR = \frac{\left(-\frac{1}{2}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{u}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}\right)}{56.25} =$$

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot 9^2}{56.25} = 0.36 \Rightarrow \angle QPR = 68.9^\circ$$

$$S_{\Delta QPR} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{PQ}| \cdot |\overline{PR}| \cdot \sin 68.9^\circ = \frac{1}{2} \cdot 56.25 \cdot \sin 68.9^\circ = 26.24 \quad (2)$$

א.מ. ספרי מתמטיקה



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MR} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}(\underline{u} - \underline{v}) + \frac{1}{3}\underline{w} \quad \text{ג.} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w} \\ \overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \underline{w} + \frac{1}{3}\underline{u} = \\ &= \frac{1}{2}(-\underline{v} - \underline{u}) + \underline{w} + \frac{1}{3}\underline{u} \Rightarrow \overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{6}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}\end{aligned}$$

### פתרון שאלה מס' 3

א. (1) נסמן ב-  $a$  את מספר השועלים שנספרו ברישום הראשון. מקבלים:

| $f(0)$ | $q$ | $t$ (שנים) | $f(t)$ (מספר שועלים) |
|--------|-----|------------|----------------------|
| $a$    | $q$ | 5          | $0.418a$             |

$$\begin{aligned}a \cdot q^5 &= 0.418a \Rightarrow q = \sqrt[5]{0.418} = 0.84 \quad \text{חישוב:} \\ &\Rightarrow \frac{100-p}{100} = 0.84 \Rightarrow 100-p = 84 \Rightarrow p = 16\%\end{aligned}$$

(2)

| $f(0)$ | $q$  | $t$ (שנים) | $f(t)$ (מספר שועלים)  |
|--------|------|------------|---|
| $a$    | 0.84 | $t$        | $a \cdot 0.84^t = 0.1a \Rightarrow$<br>$0.84^t = 0.1 \Rightarrow t = \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.84)} \approx 13.2$ |

כעבור 13 שנים בקירוב, יישארו רק 10% מן השועלים

ב. בפרק זמן של 6 שנים גדל מספר השועלים פי 1.34, לכן, אם נסמן ב-  $q$  את קצב הריבוי השנתי

$$1.34a = a \cdot q^6 \Rightarrow q^6 = 1.34 \Rightarrow q = \sqrt[6]{1.34} \Rightarrow q = 1.05 \Rightarrow \text{נקבל:}$$

$$\frac{100+p}{100} = 1.05 \Rightarrow 100+p = 105 \Rightarrow p = 5\%$$

ג.

| $f(0)$ | $q$  | $t$ (שנים)   | $f(t)$ (מספר שועלים) |                  |
|--------|------|--------------|----------------------|------------------|
| 320    | 0.84 | $t_1 = 13.2$ | $0.1 \cdot 320 = 32$ | לפני תכנית ההגנה |
| 32     | 1.05 | $t_2$        | 40                   | אחרי תכנית ההגנה |

$$32 \cdot 1.05^{t_2} = 40 \Rightarrow 1.05^{t_2} = \frac{40}{32} \Rightarrow 1.05^{t_2} = 1.25 \Rightarrow t_2 = \frac{\ln(1.25)}{\ln(1.05)} \approx 4.6$$

$$\Rightarrow t_1 + t_2 = 13.2 + 4.6 \approx 17.8 \Rightarrow \text{כעבור } \mathbf{18 \text{ שנים בקירוב}}$$

.7

| f(0) | q    | t (שנים) | f(t) (מספר שועלים)         |
|------|------|----------|----------------------------|
| 320  | 0.84 | 18       | $320 \cdot 0.84^{18} = 14$ |

היו נותרים **14 שועלים**

### פתרון שאלה מס' 4

א. הישר  $x = 5$  הנו אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה  $f(x)$  לכן מתקיים :

$$\mathbf{b = 25} \Leftarrow 25 - 50 + b \Leftarrow 5^2 - 10 \cdot 5 + b = 0 \Leftarrow x = 5 \text{ עבור } x^2 - 10x + b = 0$$

$$\mathbf{b.} \quad f(x) = \frac{10e^{-\frac{1}{2}x}}{x^2 - 10x + 25}$$

$$(1) \text{ תחום ההגדרה: } x^2 - 10x + 25 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$$

$$(2) \text{ חיתוך עם ציר ה-} y : (0; 0.4) \Rightarrow f(0) = \frac{10 \cdot e^0}{25} = 0.4$$

$$0 = \frac{10e^{-\frac{1}{2}x}}{x^2 - 10x + b} \Rightarrow 10e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \Rightarrow \text{אין פתרון } x \text{ : חיתוך עם ציר ה-} x$$

$$f(x) = \frac{10e^{-\frac{1}{2}x}}{x^2 - 10x + 25} \Rightarrow f'(x) = \frac{-5e^{-\frac{1}{2}x}(x^2 - 10x + 25) - 10e^{-\frac{1}{2}x}(2x - 10)}{(x^2 - 10x + 25)^2} = (3)$$

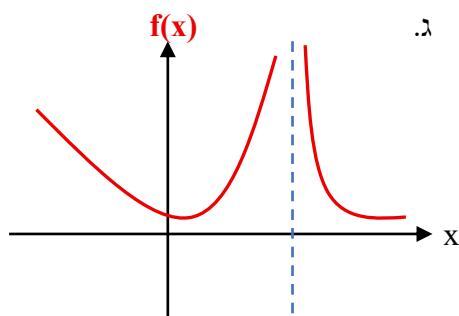
$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}x}[-5(x^2 - 10x + 25) - 10(2x - 10)]}{(x^2 - 10x + 25)^2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}[-5x^2 + 50x - 125 - 20x + 100]}{(x^2 - 10x + 25)^2} =$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}[-5x^2 + 30x - 25]}{(x^2 - 10x + 25)^2} = 0 \Rightarrow -5x^2 + 30x - 25 = 0 \Rightarrow x = 5, x = 1$$

$x \neq 5$  על פי תחום ההגדרה, לכן מתקבל רק הפתרון  $x = 1$ . מקבלים:

|       |            |     |             |   |            |
|-------|------------|-----|-------------|---|------------|
| x     | $x < 1$    | 1   | $1 < x < 5$ | 5 | $x > 5$    |
| f'(x) | -          | 0   | +           |   | -          |
| f(x)  | $\searrow$ | Min | $\nearrow$  |   | $\searrow$ |

$f(1) = \frac{10e^{-\frac{1}{2}}}{16} = 0.38$  . מקבלים: נקודת מינימום של הפונקציה  $f(x)$  (1;0.38)



ג. 4) תחום העלייה:  $1 < x < 5$ , תחומי הירידה:  $x < 1$ ,  $x > 5$  .

ד. 1) גרף הפונקציה  $g(x)$  הוא שיקוף ומתיחה פי 16 של גרף

הפונקציה  $f(x)$ . נקודת החיתוך של עם ציר ה-  $y$ :

$$g(0) = -16 \cdot f(0) = -16 \cdot 0.4 = -6.4 \Rightarrow (0; -6.4)$$

2) הנקודה (1;0.38) היא נקודת המינימום של  $f(x)$  לכן

עבור  $x = 1$  יש לפונקציה  $g(x)$  נקודת מקסימום ושיעור

ה-  $y$  של הנקודה הוא  $-6.08 = -16 \cdot 0.38$ . מקבלים: (1;-6.08) מקסימום

3) בתחום  $x < 1$  הפונקציה  $f(x)$  יורדת, לכן הפונקציה  $g(x)$  עולה בתחום  $x < 1$ .

מסקנה:  $g'(x)$  חיובית בתחום  $x < 1$ .

## פתרון שאלה מס' 5

א. נתון:  $f'(1) = -4$ . לכן:

$$f(x) = x^2(\ln x + a) \Rightarrow f'(x) = 2x(\ln x + a) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x(\ln x + a) + x =$$

$$\Rightarrow f'(x) = x(2 \ln x + 2a + 1) \Rightarrow 1(2 \ln 1 + 2a + 1) = -4 \Rightarrow$$

$$2a + 1 = -4 \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow a = -2.5$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2(\ln x - 2.5)$$

ב. 1) תחום ההגדרה:  $x > 0$ .

2) הפונקציה לא מוגרת עבור  $x = 0$  לכן אין חיתוך עם ציר ה-  $y$ .

חיתוך עם ציר ה-  $x$ :

$$x^2(\ln x - 2.5) = 0 \Rightarrow \ln x - 2.5 = 0 \Rightarrow \ln x = 2.5 \Rightarrow x = e^{2.5} = 12.18$$

מתקבלת הנקודה (12.18;0)

$$f'(x) = 2x(\ln x - 2.5) + x = x(2 \ln x - 5 + 1) \Rightarrow f'(x) = x(2 \ln x - 4) = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow 2 \ln x - 4 = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 4 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \approx 7.39$$

|         |   |            |       |            |
|---------|---|------------|-------|------------|
| $x$     | 0 | $< x <$    | $e^2$ | $< x$      |
| $f'(x)$ |   | -          | 0     | +          |
| $f(x)$  |   | $\searrow$ | min   | $\nearrow$ |

$$\text{נקודת מינימום} \left( e^2; -\frac{e^4}{2} \right) : \text{מקבלים: } f(e^2) = e^4 (\ln e^2 - 2.5) = -\frac{e^4}{2}$$

(4) לפונקציה  $f(x)$  יש רק נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- $x$  לכן גרף I. לא מתאים. לפונקציה יש נקודת

מינימום לכן גרף II. לא מתאים. על פי התוצאות הקודמות, הגרף המתאים הוא גרף III.

ג. (1) הפונקציה  $g(x)$  היא פונקציית הנגזרת של  $f(x)$ . לכן, פתרון המשוואה  $g(x) = 0$  הוא  $x = e^2$ .

נקודת החיתוך של  $g(x)$  עם ציר ה- $x$  היא  $(e^2; 0)$ .

(2) הפונקציה  $f(x)$  יורדת בתחום  $0 < x < e^2$  לכן פונקציית הנגזרת  $g(x)$  שלילית בתחום זה.

$$S = \int_1^{e^2} -g(x) dx = \int_1^{e^2} -f'(x) dx = [-f(x)]_1^{e^2} = -f(e^2) + f(1) = \frac{e^4}{2} - 2.5 = \mathbf{24.8} \quad (3)$$