

מבחן מס' 1

פרק ראשון - סדרות, גיאומטריה במרחב וגדילה ודעיכה

1. א. הסדרה a_1, a_2, a_3, \dots היא סדרה חשבונית עולה. הפרש הסדרה הוא d .

הסדרה b_1, b_2, b_3, \dots היא סדרה הנדסית שמנתה q .

נתון: $a_1 = 1.5$, $b_1 = 9$. סכום שלושת האיברים הראשונים של הסדרה ההנדסית

קטן ב-11 מסכום ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה החשבונית.

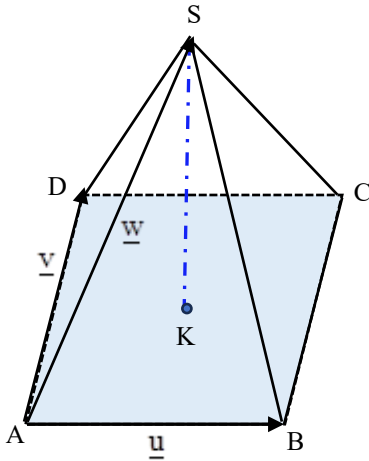
מכפלת שלושת האיברים הראשונים של הסדרה ההנדסית שווה ל-216.

(1) חשבו את ההפרש של הסדרה החשבונית ואת המנה של הסדרה ההנדסית.

(2) האם הסדרה b_1, b_2, b_3, \dots היא סדרה עולה או יורדת?

ב. בסדרה החשבונית a_1, a_2, a_3, \dots יש מספר זוגי של איברים. סכום האיברים במקומות הזוגיים

בסדרה הוא 415. מצאו את מספר אברי הסדרה.



2. $SABCD$ פירמידה שבסיסה מעוין $ABCD$.

K נקודת החיתוך של אלכסוני המעוין $ABCD$.

נסמן: $\vec{AS} = \vec{w}$, $\vec{AD} = \vec{v}$, $\vec{AB} = \vec{u}$.

א. (1) בטאו באמצעות \vec{u} , \vec{v} ו- \vec{w} את \vec{AC} ואת \vec{BD} .

(2) הראו כי \vec{AC} מאונך ל- \vec{BD} .

(3) בטאו את \vec{KS} באמצעות \vec{u} , \vec{v} ו- \vec{w} .

ב. נתון: אורך צלע המעוין הוא 12, $\vec{v} \cdot \vec{u} = 72$.

חשבו את זוויות המעוין $ABCD$.

ג. נתון: \vec{KS} מאונך למישור המעוין $ABCD$.

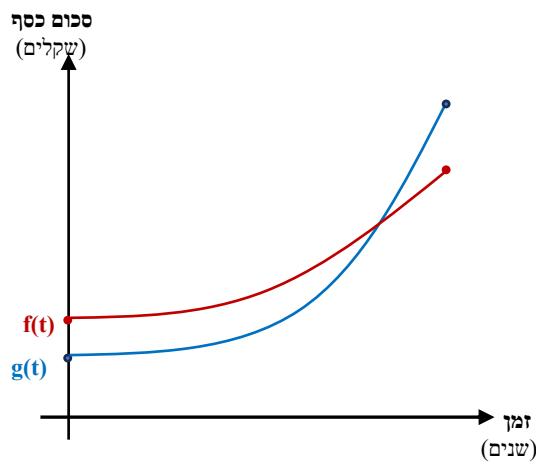
(1) הוכיחו כי $\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 108$.

(2) נתון: $\cos \angle SAB = \frac{\sqrt{3}}{4}$. חשבו את $|\vec{w}|$.

(3) נתון: $KS = 18$, חשבו את נפח הפירמידה $SABCD$.

3. יואב ועמוס החליטו להקים יחד עסק משותף בתחילת שנת 2015. כל אחד מהם השקיע מחצית מסכום הכסף הדרוש להקמת העסק. חסכוניותיהם לא הספיקו, לכן, כל אחד מהם לקח הלוואה שתוחזר בעוד 20 שנה, בעזרת הכסף שהעסק צפוי להרוויח. יואב נזקק להלוואה של 75,000 ₪ ועמוס נזקק להלוואה של 50,000 ₪. יואב השיג בבנק את הלוואה בריבית שנתית של 8%. עמוס השיג בבנק את הלוואה בריבית שנתית של 5% ואילו עמוס השיג בבנק שלו הלוואה בריבית שנתית של 8%.

הגרפים בשרטוט שלפניכם מתארים את סכום הכסף שיהיה חייב כל אחד מן השותפים לפי הזמן:



א. קבעו איזו מן הפונקציות $f(t)$ ו- $g(t)$ מתאימה ליואב ואיזו לעמוס. נמקו.

ב. (1) איזה סכום כסף חייב לבנק כל אחד

מן השותפים בתחילת שנת 2020?

(2) בתחילת איזו שנה יתברר לעמוס שהחוב

שלו לבנק יהיה גבוה מן החוב של יואב?

(3) מהו סכום הכסף שיצטרך לשלם לבנק כל

אחד מן השותפים בסוף תקופת ההלוואה?

ג. עמוס ניסה תחילה להשיג הלוואה על סך 50,000 ₪

כך שהסכום שיהיה חייב כעבור 20 שנה יהיה שווה

לסכום שיהיה חייב יואב לבנק. איזו ריבית שנתית על החוב הייתה מאפשרת זאת?

פרק שני - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x} + 3}{e^x - 1}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואת האסימפטוטה לגרף הפונקציה המאונכת לציר ה- x .
- (3) האם יש לפונקציה $f(x)$ נקודות חיתוך עם הצירים? נמקו את קביעתכם.
- ב. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
- (2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- (3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. הוסיפו לשרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$ את גרף הישר $y = 7$ ומצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר $y = 7$.
- ד. סמנו ב- S את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 7$.
- נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - 7$. בטאו באמצעות S את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה- x . נמקו.

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln(x+a)}{x-e}$.

- גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = e + 1$.
- א. מצאו את a .
- הציבו $a = -e$ וענו על הסעיפים הבאים:
- ב. (1) האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה נוספת, פרט לנקודה הנתונה? נמקו.
- (2) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (3) מצאו את משוואת האסימפטוטה לגרף הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה- x .
- (4) מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
- (5) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x) + 1$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. האם גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x ? אם כן, בכמה נקודות?
- ד. נתונה הפונקציה $h(x) = f(x+k)$ המוגדרת אף בתחום בו מוגדרת הפונקציה $f(x)$. נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$ נמצאת על ציר ה- y . מצאו את הערך של k .

בהצלחה!

תשובות

1. א. 1) $d = 4$, $q = \frac{2}{3}$ (2) יורדת ב. 20

2. א. 1) $\overline{AC} = \underline{u} + \underline{v}$, $\overline{BD} = -\underline{u} + \underline{v}$, $\overline{KS} = -\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}$ (3)

ב. $\angle DAB = \angle DCB = 60^\circ$, $\angle ABC = \angle ADC = 120^\circ$

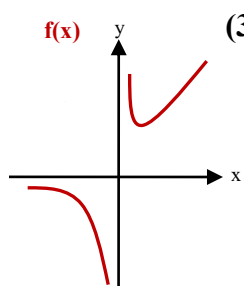
ג. 2) $|\underline{w}| = 12\sqrt{3}$ (3) $432\sqrt{3}$

3. א. $f(t)$ - יואב, $g(t)$ - עמוס (ב. 1) החוב של יואב: 95,721 ₪,

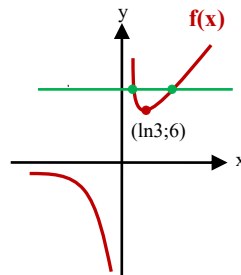
החוב של עמוס: 73,466 ₪ (2) תחילת שנת 2030

(3) יואב - 198,997 ₪, עמוס - 233,048 ₪ ג. 7.15%

4. א. 1) $x \neq 0$ (2) $x = 0$ אין (3) מינימום $(\ln 3; 6)$

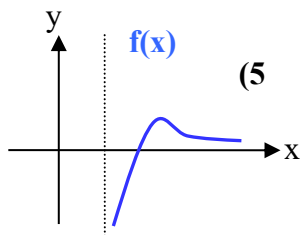


(3) 2) תחום העלייה: $x > \ln 3$, תחומי הירידה: $0 < x < \ln 3$, $x < 0$



ג. $(\ln 2; 7)$, $(\ln 5; 7)$

ד. S



5. א. $a = -e$ (ב. 1) לא (2) $x > e$ (3) $x = e$ (4) מקסימום $\left(2e; \frac{1}{e}\right)$ (5)

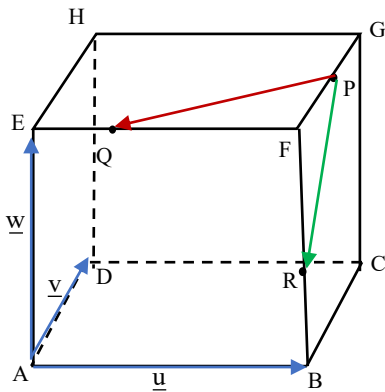
ג. לא ד. $k = 2e$

מבחן מס' 2

פרק ראשון - סדרות, גיאומטריה במרחב וגדילה ודעיכה

1. רן בילה חמישה ימי חופשה בעיירת נופש. התברר שבכל יום ההוצאות של רן על הבילויים היו גדולים פי 1.5 מן ההוצאות ביום הקודם. הסכום הכולל של הוצאותיו בחופשה זו היה 2110 ₪.
- א. (1) כמה כסף הוציא רן על הבילויים ביום הראשון של החופשה?
 (2) כמה כסף הוציא רן על הבילויים ביום האחרון של החופשה?
- לאחר החופשה החליט רן לקחת הלוואה לכיסוי הוצאותיו בחופשה. הוא ביקש להחזיר את ההלוואה בתשלומים חודשיים, כך שכל תשלום נמוך בסכום קבוע מן התשלום הקודם. במשך שלושת החודשים הראשונים החזיר רן 1665 ₪. התשלום ששילם בחודש הרביעי היה נמוך ב- 110 ₪ מן התשלום ששילם בחודש השני.
- ב. (1) כמה שילם רן עבור ההלוואה בחודש הראשון?
 (2) תוך כמה חודשים השלים רן את התשלום עבור ההלוואה, אם ידוע שהחזיר את ההלוואה תוך פחות מחצי שנה?

א.מ. ספרי מתמטיקה

2. בשרטוט שלפניכם מתוארת קובייה $ABCDEFGH$.

נפח הקובייה הוא 729.

הנקודה P היא אמצע המקצוע FG . הנקודה Q נמצאת עלהמקצוע EF , כך ש: $\overrightarrow{EQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$, הנקודה R נמצאתעל המקצוע FB כך ש: $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$.נסמן: $\overrightarrow{AE} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.א. הראו שהווקטור \overrightarrow{QR} מקביל לווקטור \overrightarrow{HC} .2. הראו שהווקטור \overrightarrow{QR} מאונך לווקטור \overrightarrow{AG} .ב. 1) חשבו את הזווית $\sphericalangle QPR$.2) חשבו את שטח המשולש QPR .ג. אלכסוני הפאה $ABCD$ נחתכים בנקודה M.בטאו את הווקטורים \overrightarrow{MR} ו- \overrightarrow{MQ} באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} .

3. חוקרים מתחום הגנת הטבע מצאו שזן מסוים של שועלים נמצא בסכנת הכחדה לאור העובדה שמספרם קטן באחוז מסוים מדי שנה. החוקרים החלו לערוך רישום של מספר השועלים שנצפו בטבע באזור מחייתם. כעבור 5 שנים מתחילת הרישום, נמצא שנותרו רק 41.8% ממספר השועלים שנצפו בספירה הראשונה.
- א. (1) בכמה אחוזים יורד מספר השועלים בכל שנה?
- ב. (2) תוך כמה שנים (בקירוב) יישארו רק 10% ממספר השועלים שנצפו בהתחלה?
- ג. כאשר נותרו רק 10% ממספר השועלים שנצפו בהתחלה, החליטו החוקרים להפעיל תכנית הגנה לשמירה על השועלים. הם הוכנסו למתחם מוגן בתנאי מחייה טובים. בתנאים אלה, השועלים החלו להתרבות בקצב שנתי קבוע. 6 שנים אחרי הכנסת השועלים למתחם המוגן, היה מספר השועלים גדול פי 1.34 ממספרם ביום בו הוכנסו למתחם.
- ד. בכמה אחוזים גדל מספר השועלים המטופלים במתחם המוגן מדי שנה?
- ה. המחקר נערך על 320 השועלים שנצפו בטבע באזור מחייתם ברישום הראשון, לפני שהוכנסו למתחם המוגן. כעבור כמה שנים, לאחר הכנסתם למתחם המוגן, יהיו במתחם 40 שועלים?
- ו. אם תכנית ההגנה לא הייתה יוצאת לפועל והשועלים היו נותרים בטבע, מה היה מספר השועלים באותו אזור אחרי פרק הזמן שמצאתם בסעיף ג'?

פרק שני - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{10e^{-\frac{1}{2}x}}{x^2 - 10x + b}$, פרמטר b .

לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית שמשוואת $x = 5$.

א. מצאו את הערך של הפרמטר b .

הציבו $b = 25$ בפונקציה $f(x)$ וענו על הסעיפים הבאים:

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.

(4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = -16 \cdot f(x)$ המוגדרת באותו תחום בו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

היעזרו בסעיפים הקודמים וענו על שאלות (1) – (3) בסעיף ד':

ד. (1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- y .

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוג הקיצון.

(3) הפונקציה $g'(x)$ היא הנגזרת של הפונקציה $g(x)$. האם הפונקציה $g'(x)$ חיובית או שלילית

בתחום $x < 1$? נמקו.

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2(\ln(x) + a)$, פרמטר a .

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא -4 .
א. מצאו את a .

הציבו $a = -2.5$ בפונקציה $f(x)$ וענו על הסעיפים הבאים:
ב. 1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2) מצאו את נקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.

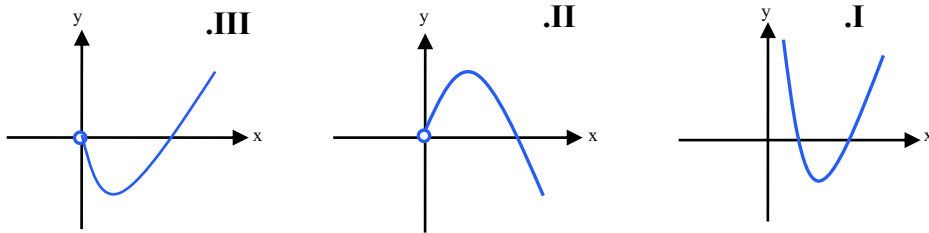
4) זהו איזה מן הגרפים I - III. המתוארים בשרטוט שבסוף השאלה הוא גרף הפונקציה $f(x)$.
נמקו את קביעתכם.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f'(x)$.

1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

2) האם הפונקציה $g(x)$ חיובית או שלילית בתחום $0 < x < e^2$? נמקו.

3) חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x והישר $x = 1$.



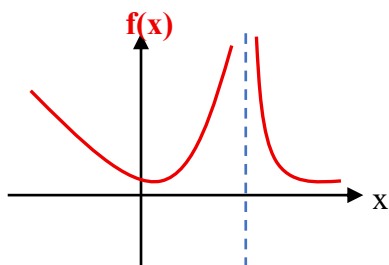
בהצלחה!

תשובות

1. א. 160 ב. 810 ג. 610 ד. 4 חודשים

2. א. $\angle QPR = 68.9^\circ$ ב. 26.24 ג. $\vec{MQ} = -\frac{1}{6}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{MR} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$

3. א. 16% ב. כעבור 13 שנים בקירוב ג. 5% ד. 18 שנים בקירוב ה. 14 שועלים



4. א. $b = 25$ ב. $x \neq 5$ ג. $(1; 0.38)$ ד. מינימום
 (4) תחום העלייה: $1 < x < 5$, תחומי הירידה: $x < 1$, $x > 5$ ג.
 ד. 1) $(0; -6.4)$ 2) $(1; -6.08)$ מקסימום 3) חיובית

5. א. $a = -2.5$ ב. $x > 0$ ג. $(12.18; 0)$ ד. מינימום $(e^2; -\frac{e^4}{2})$ גרף III.

ג. 1) $(e^2; 0)$ 2) שלילית 3) 24.8