א.מ. ספרי מתמטיקה

מיקוד חוברת 10 מתכונות שאלון 582 על פי מיקוד חורף - קיץ תשפ"ד 2024

מבחן	שאלה	סעיפים שירדו
1	1	הכול
	2	ג-4)
2	2	ג , ד
	4	הכול
3	1	ב , ג , ד
	2	ב-2) , 3)
	3	הכול
	4	ג
	5	הכול
4	2	א
5	1	ד
	5	ה- 2
6	3	א , ב-3)
6	**4**	**נוסף סעיף**
7	1	ה
	3	**השאלה הוחלפה**
8	2	א-2) , ב-2)
	5	הכול
9	1	ב , ג
	2	ב-4)
	4	הכול
10	2	ג
	4	הכול

תוספת במבחן מס' 6 , שאלה מס' 4 , סעיף א* בין הסעיפים א'

ו- ב' (צבירת שטח)

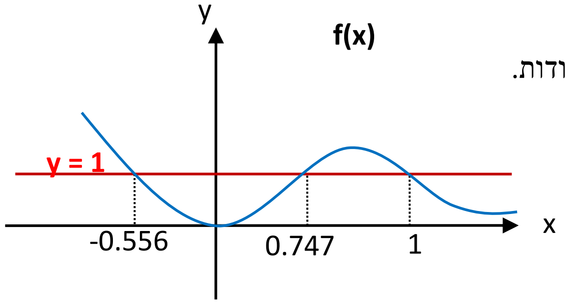
4. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.

הישר $y = 1$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשלוש נקודות.

שיעורי ה- x של הנקודות מסומנות בציור.

לפונקציה יש נקודות מינימום בראשית הצירים

ונקודת מקסימום בנקודה $(0.874;1.065)$.



א. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$.
1) מצא את תחום ההגדרה של $g(x)$.
2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגה.
3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .
4) מצא אסימפטוטות לגרף הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
5) סרטט את גרף של הפונקציה $g(x)$.

א* הפונקציה $h(x)$ מוגדרת באופן הבא: $h(x) = \int_{0.747}^{x} (g(t))dt$ בתחום $0.747 \le x \le 1$.

1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $h(x)$ (אם יש כאלה) בתחום הנתון.
2) נתון: $h(1) = 0.01$. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ בתחום הנתון.
3) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של הפונקציה $h(x)$ בתחום הנתון.
4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום $0.747 \le x \le 1$.

ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת : $f(x) = x^2e^{-x^3+1}$.
1) הראה שהשטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 1$ בתחום $x > 0$ הוא בערך 0.0109 .
2) נסמן ב- S את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה- x .
קבע איזו מבין הטענות הבאות נכונה ונמק את קביעתך (היעזר בנתונים ובתוצאות של הסעיפים הקודמים):

I. $S > 0.0109$ II. $S < 0.0109$ III. $S = 0.0109$

3) הראה שלפונקציה $f(x)$ יש בדיוק שתי נקודות פיתול ששיעורי ה- x שלהן הן $x = 0.491$ ו- $x = 1.235$ (בקירוב) .
4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.
5) קבע את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g'(x)$.

פתרון סעיף א* :

הפונקציה $h(x)$ מייצגת את השטח המצטבר בין גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה- x בתחום $0.747 \le x \le 1$.

1) גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מעל ציר ה- x בתחום זה,
לכן השטח המצטבר הולך וגדל . הפונקציה $h(x)$

עולה בכל התחום $0.747 \le x \le 1$.

2) המינימום המוחלט של הפונקציה מתקבל עבור $x = 0.747$:

$h(0.747) = \int_{0.747}^{0.747} (g(t))dt = 0$. מקבלים: **(0.747;0) נקודת מינימום**

הערך המקסימלי מתקבל עבור $x = 1$:

$h(1) = \int_{0.747}^{1} (g(t))dt = 0.01$. מקבלים : **(1;0.01) נקודת מקסימום**.

3) $h'(x) = g(x)$, לכן $h''(x) = g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$.

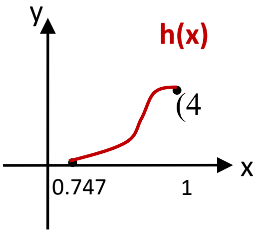
בתחום $0.747 \le x \le 1$ יש לפונקציה $f(x)$ נקודת מקסימום בנקודה $x = 0.874$.

בתחום $0.747 < x < 0.874$ הפונקציה $f(x)$ חיובית ועולה , כלומר, $f'(x) > 0$, לכן $h''(x) > 0$.

בתחום $0.874 < x < 1$ הפונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת , כלומר, $f'(x) < 0$, לכן $h''(x) < 0$.

4) מקבלים : **תחום הקעירות כלפי מעלה של $h(x)$: $0.747 < x < 0.874$,**

תחום הקעירות כלפי מטה של $h(x)$: $0.874 < x < 1$



מבחן מס' 7 , שאלה מס' 3

3. נתונה המשוואה $z^4 = a + bi$. פתרונות המשוואה מיוצגים , במישור של גאוס , על-ידי ארבעה מספרים הנמצאים על המעגל $x^2 + y^2 = 2$. שניים מהם נמצאים על הישר $y = x$.

א. 1) מצא את a ו- b .

2) מצא את פתרונות המשוואה.

ב. הראה שפתרונות המשוואה: $7z^2 + 7\bar{z}^2 - 50z\bar{z} + 100 = 0$ מייצגים , במישור של גאוס , אליפסה קנונית ומצא את משוואת האליפסה.

ג. 1) הראה פתרונות המשוואה $z^4 = a + bi$ עבור ערכי a ו- b שמצאת בסעיף א-1) נמצאים על האליפסה שמצאת בסעיף ב'.

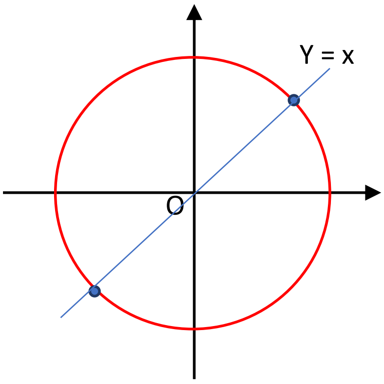
2) אחד הפתרונות של המשוואה $z^4 = a + bi$ מיוצג במישור של גאוס על-ידי נקודה הנמצאת ברביע השני . חשב את היקף המשולש שיוצרת נקודה זו עם מוקדי האליפסה שמצאת בסעיף ב' .

א. 1) $a = -4, b = 0$ 2) $\sqrt{2}cis(45^\circ) = 1 + i, \sqrt{2}cis(135^\circ) = -1 + i$

$\sqrt{2}cis(225^\circ) = -1 - i, \sqrt{2}cis(315^\circ) = 1 - i$

ב. $\frac{x^2}{\frac{25}{9}}+\frac{y^2}{\frac{25}{16}}=1 \Leftarrow 9x^2+16y^2=25$ ג. 2)

פתרון:



א. 1) נסמן ב- $z_1=R\text{cis}\theta$ את אחד הפתרונות של המשוואה.

הנקודה המתאימה נמצאת על המעגל $x^2+y^2=2$, לכן ,

$R=\sqrt{2}$. הנקודה גם נמצאת על הישר $y=x$ לכן

$\tan\theta=1$ או $\tan\theta=-1$ ולכן $\theta=45^\circ$ או $\theta=225^\circ$.

פתרון המשוואה מקיים את המשוואה $z_1{}^4=a+bi \Leftarrow$

$\left(\sqrt{2}\text{cis}45^\circ\right)^4=a+bi \Rightarrow 4\text{cis}180^\circ=a+bi \Rightarrow -4=a+bi$

$\Rightarrow$ **$a=-4, b=0$**

(או $\left(\sqrt{2}\text{cis}225^\circ\right)^4=a+bi \Rightarrow 4\text{cis}180^\circ=a+bi \Rightarrow -4=a+bi$)

2) $z^4=-4 \Rightarrow z^4=4\text{cis}(180^\circ+360^\circ k) \Rightarrow z_k=\sqrt{2}\text{cis}(45^\circ+90^\circ k) \Leftarrow$

ארבעת פתרונות המשוואה הם :

$$\mathbf{\sqrt{2}cis\left(45^o\right)=1+i\,,\,\sqrt{2}cis\left(135^o\right)=-1+i\,,\,\sqrt{2}cis\left(225^o\right)=-1-i\,,\,\sqrt{2}cis\left(315^o\right)=1-i}$$

ב. נסמן : $z=x+yi$ ונציב במשוואה הנתונה: $7z^2+7\bar{z}^2-50z\bar{z}+100=0$. מקבלים:

$$\Rightarrow 7(x+yi)^2+7(x-yi)^2-50(x+yi)(x-yi)+100=0$$

$$\Rightarrow 7x^2+14xyi+7y^2i^2+7x^2-14xyi+7y^2i^2-50(x^2-y^2i^2)+100=0$$

$$\Rightarrow 14x^2-7y^2-7y^2-50(x^2+y^2)+100=0$$

$$\Rightarrow 14x^2-14y^2-50x^2-50y^2+100=0 \Rightarrow 36x^2+64y^2=100$$

$$\mathbf{9x^2+16y^2=25 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{25}{9}}+\frac{y^2}{\frac{25}{16}}=1}$$

ג. 1) ארבעת פתרונות המשוואה מקיימים: $x^2=1$ וגם $y^2=1$, לכן הם מקיימים את המשוואה $9x^2+16y^2=25$.

2) הפתרון $(-1+i)$ של המשוואה $z^4=-4$ מיוצג במישור של גאוס על ידי הנקודה $(-1;1)$ הנמצאת ברביע השני. נמצא את מוקדי האליפסה:

$$c^2=a^2-b^2=\frac{25}{9}-\frac{25}{16}=\frac{175}{144} \Rightarrow c=\frac{5\sqrt{7}}{12}$$

לכן מוקדי האליפסה נמצאים בנקודות $\left(\frac{5\sqrt{7}}{12};0\right)$ ו- $\left(-\frac{5\sqrt{7}}{12};0\right)$

$$S_{ABCD}=\frac{(4+4\sqrt{3})\cdot 2(1+\sqrt{3})}{2}=4(1+\sqrt{3})^2=\mathbf{16+8\sqrt{3}}$$

3) AD מאונך לציר ה- x בנקודה E ו- BC מאונך לציר ה- x בנקודה F .

$\sphericalangle OAE=30^\circ$. משולש AOB ישר זווית ושווה-שוקיים

לכן $\sphericalangle BAO = \sphericalangle ABO = 45^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAD = 75^\circ$.

טרפז חסום במעגל הוא טרפז שווה-שוקיים לכן

$$\boldsymbol{\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC = 75^o \Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 105^o}$$

ב. $P = z_2^{10} = \left(4cis150^\circ\right)^{10} = 4^{10}cis60^\circ$ $\Leftarrow$ הנקודה P נמצאת
על הישר OP היוצר זווית בת 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .