שאלון 382

מבחן מס' 1

אלגברה

1. קבוצה של שבעה חברים הזמינה , עבור כל אחד מהם , מנה של פיצה או מנה של צ'יפס מרשת מזון כלשהי . הם שילמו בעד כל ההזמנה 117 ₪. עבור מנת צ'יפס הם שילמו 15 ₪ ועבור כל מנת פיצה הם שילמו מחיר הגבוה ב- 20% מן המחיר של מנת צ'יפס.

א. 1) כמה שילמו החברים עבור מנת פיצה ?
2) כמה מנות צ'יפס הזמינה קבוצת החברים ?

ב. ברשת מזון אחרת , מנת פיצה יקרה ב- 20% מן המחיר ששילמו החברים ואילו מנת צ'יפס זולה ב- 10% מן המחיר ששילמו החברים.
(1 מה היה מחיר ההזמנה כולה לו הזמינו החברים את אותה הזמנה ברשת המזון השנייה ?
(2 מה היה אחוז הרווח או ההפסד של החברים אילו הזמינו ברשת המזון האחרת ?

(עגל את התוצאה לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית)

פתרון:

א. 1) מחיר מנת צ'יפס = 15 ₪ . מחיר מנת פיצה גבוה ב- 20% ממחיר מנת צ'יפס , לכן:

$18 = 15 \cdot \frac{120}{100} \Leftarrow$ מחיר מנת פיצה הוא **18 ₪**.

2) נסמן ב- x את מספר מנות הצ'יפס שהוזמנו. על כן , מספר מנות הפיצה שהוזמנו הוא $7 - x$. מקבלים :

		כמות	מחיר יחידה (₪)	סה"כ (₪)
רשת מזון א'	פיצות	$7 - x$	18	$18(7 - x)$
	צ'יפס	x	15	$15x$

מתקבלת המשוואה : $18(7 - x) + 15x = 117$
מכאן: $126 - 18x + 15x = 117$
$-3x = -9$
$x = 3$

תשובה: קבוצת החברים הזמינה **3 מנות צ'יפס**

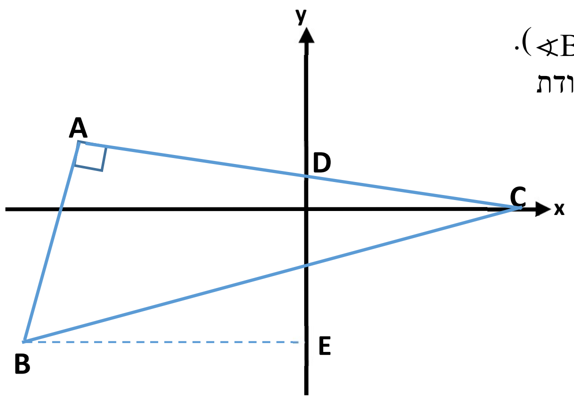
ב. 1) ברשת המזון השנייה:

מחיר מנת פיצה הוא ₪ $21.6 = 18 \cdot \frac{120}{100}$, ומחיר מנת צ'יפס הוא ₪ $13.5 = 15 \cdot \frac{90}{100}$.

		כמות	מחיר יחידה (₪)	סה"כ (₪)
רשת מזון א'	פיצות	4	21.6	$21.6 \cdot 4 = 86.4$
	צ'יפס	3	13.5	$13.5 \cdot 3 = 40.5$

מחיר ההזמנה כולה ברשת השנייה הוא: ₪ $86.4 + 40.5 = \mathbf{126.9}$

2) אילו הזמינו החברים את מנות האוכל ברשת השנייה, היו משלמים $126.9 - 117 = 9.9$ שקלים יותר. ההפסד במקרה זה מהווה $\frac{9.9}{117} \cdot 100\% = \mathbf{8.46\%}$ מן המחיר ששילמו במקור.



2. משולש ABC הנו משולש ישר-זווית ($\sphericalangle BAC = 90^\circ$).
הנקודה C נמצאת על ציר ה- x . הנקודה D היא נקודת
החיתוך של הישר AC עם ציר ה- y .
משוואת הישר AC היא $y = -\frac{1}{5}x + 2$.

א. מצא את שיעורי הנקודות C ו- D .

ב. נתון: הנקודה D היא אמצע הצלע AC .
 1) מצא את שיעורי הנקודה A .
 2) מצא את משוואת הישר AB .

ג. שיעור ה- x של הנקודה B הוא 12 - .
מנקודה B מורידים אנך לציר ה- y .
האנך חותך את ציר ה- y בנקודה E . חשב את היקף המרובע ABED. (עגל את התוצאות לספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית.)

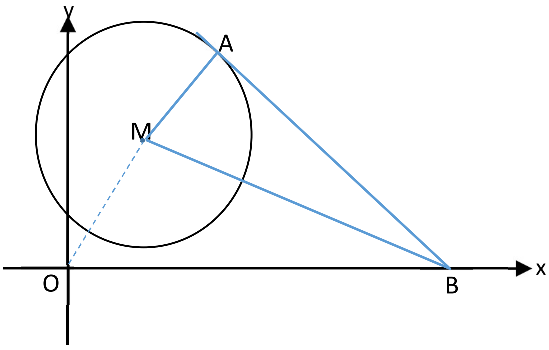
<u>פתרון:</u>

א. הנקודה C נמצאת על הישר $y = -\frac{1}{5}x + 2$ ועל ציר ה-x לכן:
$$0 = -\frac{1}{5}x + 2 \Rightarrow \frac{1}{5}x = 2 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow \mathbf{C(10;0)}$$
הנקודה D נמצאת על הישר $y = -\frac{1}{5}x + 2$ ועל ציר ה-y לכן:
$$y = -\frac{1}{5}\cdot 0 + 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \mathbf{D(0;2)}$$

ב. 1) D אמצע AC לכן מקבלים: $0 = \frac{x_A + 10}{2} \Rightarrow x_A = -10$,
$$2 = \frac{y_A + 0}{2} \Rightarrow y_A = 4 \Rightarrow \mathbf{A(-10;4)}$$
2) שיפוע הישר AC הוא $-\frac{1}{5}$ ו- AB מאונך ל- AC . לכן שיפוע הישר AB הוא 5 .
מקבלים: $y - 4 = 5(x + 10) \Rightarrow y - 4 = 5x + 50 \Rightarrow \mathbf{y = 5x + 54}$

ג. שיעור ה- x של הנקודה B הוא 12 - . B נמצאת על הישר AB לכן:
$$y = 5\cdot(-12) + 54 = -6 \Rightarrow B(-12;-6)$$
BE מאונך לציר ה- y לכן $E(0;-6)$.
מקבלים : אורך הצלע BE הוא 12 ; אורך הקטע DE הוא $y_D - y_F = 2 + 6 = 8$;
אורך הקטע AB : $AB = \sqrt{(-10+12)^2 + (4+6)^2} = \sqrt{104}$

אורך הקטע AD : $AD = \sqrt{(0+10)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{104}$
היקף המרובע ABED הוא :
$$AB + BE + ED + DA = \sqrt{104} + 12 + 8 + \sqrt{104} = \mathbf{40.4}$$



3. בציור שלפניך מתואר מעגל שמרכזו M.
בנקודה A הנמצאת על המעגל העבירו
משיק למעגל. משוואת המשיק היא:
$y = -\frac{3}{4}x + 14.5$. שיעור ה- x
של הנקודה A הוא 6.

א. 1) מצא את שיעור ה- y של הנקודה A.
2) מצא את שיפוע הישר AM.
3) מצא את משוואת הישר AM.

ב. משוואת הישר OM היא $y = 2x$ (O ראשית צירים).
1) מצא את שיעורי מרכז המעגל M.
2) מצא את משוואת המעגל.

ג. המשיק למעגל בנקודה A חותך את ציר ה- x בנקודה B.
1) מצא את שיעורי הנקודה B.
2) חשב את שטח המשולש OMB.
3) חשב את שטח המשולש AMB.

<u>פתרון:</u>

א. 1) הנקודה A נמצאת על הישר $y = -\frac{3}{4}x + 14.5$. $x = 6 \Leftarrow y = -\frac{3}{4}\cdot 6 + 14.5 = \mathbf{10}$.

2) שיפוע המשיק הוא $-\frac{3}{4}$. המשיק מאונך לרדיוס AM לכן שיפוע הישר AM הוא $\mathbf{\frac{4}{3}}$.

3) משוואת AM: $y - 10 = \frac{4}{3}(x-6) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - 8 + 10 \Rightarrow \mathbf{y = \frac{4}{3}x + 2}$

ב. 1) הנקודה M היא נקודת החיתוך של הישרים OM ו- AM לכן:

$$2x = \frac{4}{3}x + 2 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2\cdot 3 = 6 \Rightarrow \mathbf{M(3;6)}$$

2) חישוב רדיוס המעגל = אורך הקטע AM:

$$A(6;10)\ ,\ M(3;6) \Rightarrow AM = \sqrt{(6-3)^2 + (10-6)^2} = 5$$

משוואת המעגל היא : $\mathbf{(x-3)^2 + (y-6)^2 = 25}$

ג. 1) הנקודה B נמצאת על הישר $y = -\frac{3}{4}x + 14.5$ ועל ציר ה- x לכן:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{3}{4}x + 14.5 \Rightarrow \frac{3}{4}x = 14.5 \Rightarrow x = 19\frac{1}{3} \Rightarrow \mathbf{B(19\frac{1}{3};0)}$$

2) אורך הצלע OB הוא $19\frac{1}{3}$. אורך הגובה לצלע OB שווה לשיעור ה- y של הנקודה M,
כלומר ל- 6 לכן : $S_{\Delta OBM} = \frac{19\frac{1}{3}\cdot 6}{2} = \mathbf{58}$.

3) המשולש AMB הוא משולש ישר-זווית ($\measuredangle MAB = 90^\circ$). לכן שטח המשולש AMB הוא $\frac{MA \cdot AB}{2}$. MA הוא רדיוס המעגל לכן אורכו 5. חישוב אורך הקטע AB:

$AB = \sqrt{\left(6-19\frac{1}{3}\right)^2 + (10-0)^2} = 16\frac{2}{3}$. מקבלים:

$$S_{\Delta AMB} = \frac{5 \cdot 16\frac{2}{3}}{2} = \mathbf{41\frac{2}{3}}$$

4. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{4}{x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

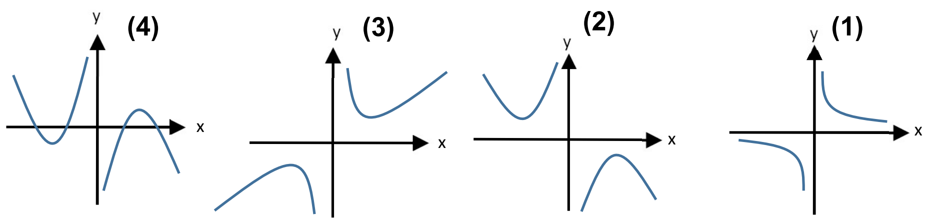
ב. 1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

3) האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים ? נמק .

ג. איזה מן הגרפים המתוארים בציור שלפניך מתאים להיות הגרף של הפונקציה $f(x)$? נמק.

ד. נתון הישר $y=-2$. בכמה נקודות חותך הישר את גרף הפונקציה ? נמק.



פתרון:

א. הפונקציה מוגדרת עבור $x\neq 0$, כלומר: **$x<0$ או $x>0$.**

ב. 1) למציאת נקודות קיצון פנימיות נשווה את הנגזרת של הפונקציה לאפס:

$$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{4}{x^2}=0\Rightarrow x^2-16=0\Rightarrow x=\pm 4$$

$$f(4)=\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{4}{4}=2\ ,\ f(-4)=\frac{1}{4}\cdot(-4)+\frac{4}{-4}=-2$$

מתקבלות הנקודות $(4;2)$ ו- $(-4;-2)$

נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה:

x	0	$x<-4$	-4	$-4<x<0$	0	$0<x<4$	4	$4<x$
f '		+	0	-		-	0	+
f		↗	Max	↘		↘	min	↗

מסקנה: **הנקודה $(-4;-2)$ היא נקודת מקסימום** , **הנקודה $(4;2)$ היא נקודת מינימום**

2) **תחומי העלייה: $x>4$, $x<-4$; תחומי הירידה: $0<x<4$, $-4<x<0$**

3) הפונקציה לא מוגדרת עבור $x=0$ לכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

חיתוך עם ציר ה- x : אין פתרון $0=\frac{1}{4}x+\frac{4}{x}\Rightarrow x^2+16=0\Rightarrow x^2=-16\Rightarrow$.

מסקנה : **אין** לפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים.

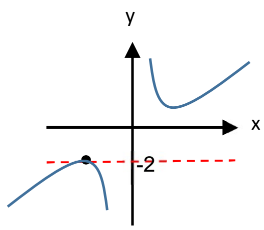
ג. הגרף המתאר פונקציה שלא חותכת את הצירים , יש לה נקודת מקסימום $(-4;-2)$ ברביע השלישי ונקודת מינימום $(4;2)$ ברביע הראשון הוא **גרף (3).**

גרף (1) – אין נקודות קיצון , גרף (2) – נקודות הקיצון אינן ברביע הנכון ,

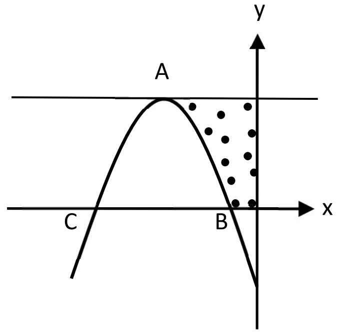
גרף (4) – הגרף חותך את ציר ה- x בסתירה לתוצאה של הסעיף הקודם.

ד. הישר $y=-2$ חותך את גרף הפונקציה

רק בנקודת המקסימום שלה , כלומר **בנקודה אחת.**



5. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה : $f(x) = -2x^2 - 12x - 10$.



א. מצא את שיעורי הקיצון של הפונקציה (הנקודה A בציור).

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x (הנקודות B ו- C בציור).

ג.. העבירו משיק גרף הפונקציה בנקודה A . מצא את משוואת המשיק.

ד. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק שמצאת בסעיף ג', ציר x וציר y (השטח המנוקד בציור).

<u>פתרון:</u>

א. $f(x) = -2x^2 - 12x - 10 \Rightarrow f'(x) = -4x - 12$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -4x - 12 = 0 \Rightarrow -4x = 12 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow$

$y = -2\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3) - 10 = 8 \Rightarrow \mathbf{A(-3;8)}$

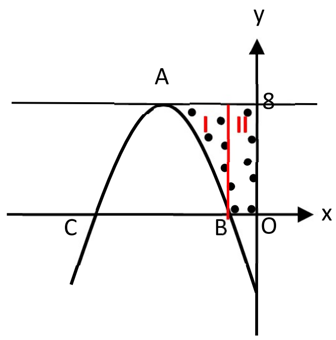
ב. נציב $f(x) = 0$:

$$-2x^2 - 12x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 5}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \;,\; x_2 = -5 \Rightarrow \mathbf{B(-1;0)} \;,\; \mathbf{C(-5;0)}$$

ג. שיפוע המשיק בנקודה A – נקודת הקיצון של הפונקציה הוא 0 . משוואת המשיק :

$y - 8 = 0 \Rightarrow \mathbf{y = 8}$



ד. נפצל את החישוב לשני שטחים S_I ו- S_{II}:

ה. S_I הוא השטח המוגבל בין שתי הפונקציות : המשיק $y = 8$, הפונקציה $f(x)$.

$$S_I = \int_{-3}^{-1}\left[8 - \left(-2x^2 - 12x - 10\right)\right]dx = \int_{-3}^{-1}\left(8 + 2x^2 + 12x + 10\right)dx =$$

$$\int_{-3}^{-1}\left(2x^2 + 12x + 18\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} + 18x\right]_{-3}^{-1} =$$

$$\left[\frac{2\cdot(-1)^3}{3} + \frac{12\cdot(-1)^2}{2} + 18\cdot(-1)\right] - \left[\frac{2\cdot(-3)^3}{3} + \frac{12\cdot(-3)^2}{2} + 18\cdot(-3)\right] =$$

$$-12\frac{2}{3} - (-18) = 5\frac{1}{3}$$

S_{II} הנו שטח של מלבן שרוחבו $OB = 1$ וגובהו 8 לכן $S_{II} = 8$.

מקבלים : $S_I + S_{II} = 5\frac{1}{3} + 8 = \mathbf{13\frac{1}{3}}$

6. נתונים שלושה מספרים חיוביים שסכומם 31. המספר השני גדול פי 5 מן המספר הראשון .

מה צריכים להיות שלושת המספרים על מנת שסכום ריבועיהם יהיה מינימלי?

פתרון:

נסמן : המספר הראשון – x , המספר השני – $5x$, המספר השלישי- $31 - x - 5x = 31 - 6x$

פונקציית המטרה: סכום ריבועי שלושת המספרים :

$$f(x) = x^2 + (5x)^2 + (31-6x)^2 = x^2 + 5x \cdot 5x + (31-6x)(31-6x) \Rightarrow$$

$$f(x) = x^2 + 25x^2 + 961 - 186x - 186x + 36x^2 \Rightarrow f(x) = 62x^2 - 372x + 961$$

נמצא את נקודת המינימום של הפונקציה:

$$f'(x) = 124x - 372 = 0 \Rightarrow 124x = 372 \Rightarrow \mathbf{x = 3}$$

זיהוי סוג הקיצון בעזרת הנגזרת השנייה: $f''(x) = 124 > 0$ לכן מתקבל מינימום עבור $x = 3$.

מקבלים:

המספר הראשון – 3 , המספר השני – 15 , המספר השלישי - 13

תשובות

1. א. 1) 18 ₪   2) 3 מנות צ'יפס   ב. 1) ₪ 126.9   2) הפסד של 8.46%

2. א. $C(10;0)$, $D(0;2)$ ב. 1) $A(-10;4)$ 2) $y = 5x + 54$ ג. 40.4

3. א. 1) 10   2) $\frac{4}{3}$ 3) $y = \frac{4}{3}x + 2$ ב. 1) $M(3;6)$ 2) $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$
ג. 1) $B(19\frac{1}{3};0)$ 2) 58   3) $41\frac{2}{3}$

4. א. $x < 0$ או $x > 0$ ב. 1) $(-4;-2)$ נקודת מקסימום , $(4;2)$ נקודת מינימום
2) תחומי העלייה: $x > 4$, $x < -4$; תחומי הירידה: $0 < x < 4$, $-4 < x < 0$
3) לא   ד. גרף (3)   ה. בנקודה אחת

5. א. $A(-3;8)$ ב. $C(-5;0)$, $B(-1;0)$ ג. $y = 8$ ד. $13\frac{1}{3}$

6. המספר הראשון – 3 , המספר השני – 15 , המספר השלישי - 13

מבחן מס' 2

אלגברה

1. קבוצה של 5 חברים החליטה ללכת לקולנוע. שלושה מן החברים היו סטודנטים הזכאים להנחה במחיר כרטיס הקולנוע. החברים התלבטו בין שני סרטים שהוצגו באותו זמן. אחד הסרטים היה סרט זר והשני היה סרט ישראלי. מחיר כרטיס רגיל לסרט הזר גדול פי 1.4 מן המחיר של כרטיס סטודנט לסרט הזר. מחיר כרטיס רגיל לסרט הישראלי נמוך ב- 25% ממחיר הכרטיס הרגיל לסרט הזר. מחיר כרטיס סטודנט לסרט הישראלי נמוך ב- 30% ממחיר כרטיס סטודנט לסרט הזר.
החברים בחרו בסרט הישראלי ושילמו עבור הכרטיסים סה"כ 126 ₪.

א. 1) מהו מחיר כרטיס סטודנט לסרט הזר ?

2) מהו מחיר כרטיס רגיל לסרט הזר ?

ב. 1) מהו המחיר הכולל שהיו משלמים החברים לו בחרו לצפות בסרט הזר ?

2) בכמה אחוזים היה גבוה הסכום הכולל של הכרטיסים לסרט הזר לעומת הסכום הכולל ששולם עבור הסרט הישראלי ? (עגל את התוצאה לספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית).

פתרון:

א. 1) נסמן : x = מחיר כרטיס סטודנט לסרט הזר. נקבל:

מחיר כרטיס רגיל לסרט הזר: $1.4x$

מחיר כרטיס סטודנט לסרט הישראלי: $\frac{70}{100}\cdot x = 0.7x$

מחיר כרטיס רגיל לסרט הישראלי: $\frac{75}{100}\cdot 1.4x = 1.05x$

		כמות	מחיר כרטיס (₪)	סה"כ (₪)
סרט זר	סטודנט	3	x	3x
	רגיל	2	1.4 x	2.8x
סרט ישראלי	סטודנט	3	0.7x	2.1x
	רגיל	2	1.05x	2.1x

מתקבלת המשוואה:

$2.1x + 2.1x = 126 \Leftarrow 4.2x = 126 \Leftarrow x = 30 \Leftarrow$

מחיר כרטיס סטודנט לסרט הזר הוא **30 ₪**

2) מחיר כרטיס רגיל לסרט הזר הוא **42 ₪** $1.4\cdot 30 =$

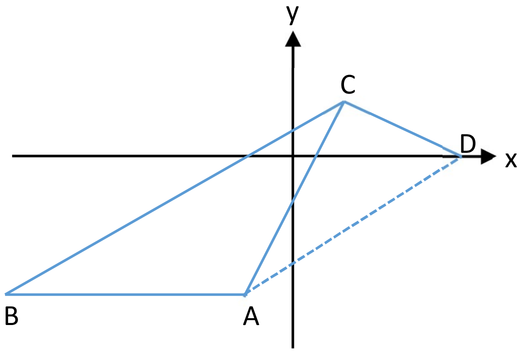
ב. 1) המחיר הכולל של הכרטיסים לסרט הזר הוא : $3x + 2.8x = 5.8x$

קיבלנו $x = 30$ לכן המחיר הכולל הוא **174 ₪** $5.8\cdot 30 =$

2) הסכום הכולל של המחיר עבור הסרט הזר גבוה ב- ₪ $174 - 126 = 48$

חישוב האחוז : $\frac{48}{126}\cdot 100\% = \mathbf{38.1\%}$

2. בציור שלפניך מתוארים המשולשים ABC ו- ADC .
הנקודות A ו- B נמצאות על הישר y = - 9 .
משוואת הישר AC היא y = 2x – 3 ומשוואת הישר BC היא y = 0.6x + 1.2 .



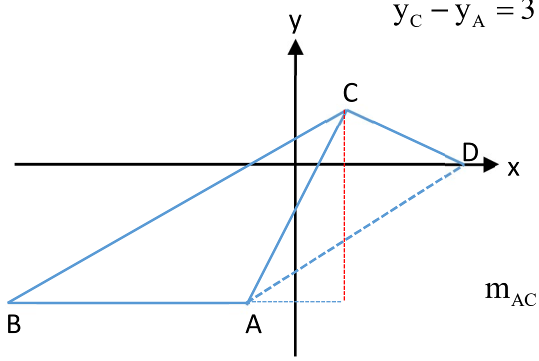
א. 1) מצא את שיעורי הנקודות A ו- B.
2) מצא את שיעורי הנקודה C .
3) מהו אורך הגובה לצלע AB במשולש ABC ?
4) חשב את שטח המשולש ABC .

נתון : D(9;0) .

ב. 1) הוכח כי הישר CD מאונך לישר AC .
2) חשב את שטח המרובע ABCD .

<u>פתרון</u> :

א. 1) הנקודות A ו- B נמצאות על הישר y = - 9 , לכן , שיעור ה- y של כל אחת הוא - 9 .
הנקודה A נמצאת על הישר y = 2x – 3 לכן: - 9 = 2x – 3 ⇐ - 6 = 2x ⇐ x = - 3.
מקבלים: **A(-3;-9)**.
הנקודה B נמצאת על הישר y = 0.6x + 1.2 לכן: - 9 = 0.6x + 1.2 ⇐ - 10.2 = 0.6x
⇐ x = - 17 . מקבלים : **B(-17;-9)**.
2) הנקודה C היא נקודת החיתוך של הישרים y = 2x – 3 ו- y = 0.6x + 1.2 לכן:
0.6x + 1.2 = 2x – 3 ⇐ - 1.4x = - 4.2 ⇐ x = 3 ⇐ y = 6 - 3 = 3.
מקבלים **C(3;3)**.
3) הגובה לצלע AB במשולש ABC הוא: $y_C - y_A = 3 + 9 = \mathbf{12}$



4) $AB = -3 + 17 = 14$ ·
שטח המשולש ABC הוא $\mathbf{84} = \frac{14 \cdot 12}{2}$

ב. 1) חישוב שיפועי הישרים CD ו- AC :

$$m_{AC} = \frac{3+9}{3+3} = \frac{12}{6} = 2 \ , \ m_{CD} = \frac{0-3}{9-3} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

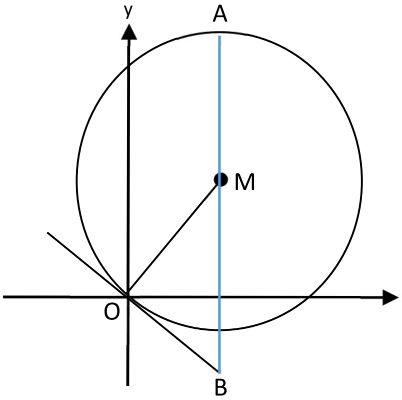
$$m_{AC} \cdot \ m_{CD} = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1 \Rightarrow AC \perp CD$$

2) חישוב שטח המשולש ACD : $S_{\Delta ACD} = \frac{AC \cdot CD}{2}$.

$$AC = \sqrt{(-3-3)^2 + (-9-3)^2} = \sqrt{36+144} = \sqrt{180}$$

$$CD = \sqrt{(9-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} \Rightarrow \quad S_{\Delta ACD} = \frac{\sqrt{180} \cdot \sqrt{45}}{2} = \mathbf{45}$$

3. נתון מעגל שמרכזו $M(5;12)$. המעגל עובר דרך ראשית הצירים O (ראה ציור).



א. 1) מצא את אורך רדיוס המעגל.
2) רשום את משוואת המעגל.

ב. הנקודה A נמצאת על המעגל כך שהקטע AM מאונך לציר ה- x . הנקודה A נמצאת מעל לנקודה M.
1) מצא את שיעור ה- x של הנקודה A.
2) מצא את שיעור ה- y של הנקודה A.

ג. דרך הנקודה O מעבירים משיק למעגל.
1) מצא את שיפוע המשיק.
2) מצא את משוואת המשיק.

ד. המשיק שמצאת בסעיף הקודם חותך את המשך הקטע AM בנקודה B.
1) מצא את אורך הקטע MB.
2) חשב את שטח המשולש OMB .

<u>פתרון:</u>

א. 1) אורך רדיוס המעגל הוא אורך הקטע OM לכן:

$$O(0;0)\ ,\ M(5;12)\ \Rightarrow OM=\sqrt{5^2+12^2}=\mathbf{13}$$

2) משוואת המעגל: $\mathbf{(x-5)^2+(y-12)^2=169}$

ב. 1) AM מאונך לציר ה- x לכן שיעור ה- x של הנקודה A שווה לשיעור ה- x של הנקודה M
$\Leftarrow \mathbf{x_A=5}$.

2) AM רדיוס המעגל שאורכו 13 , לכן, שיעור ה- y של הנקודה A גדול ב- 13
משיעור ה- y של הנקודה M $\Leftarrow y_A=12+13=25 \Leftarrow \mathbf{y_A=25}$.

ג. 1) $O(0;0)$, $M(5;12)$ לכן שיפוע הרדיוס OM הוא $m_{OM}=\frac{12}{5}$. המשיק מאונך לרדיוס ,
לכן שיפוע המשיק למעגל בנקודה O הוא $\mathbf{-\frac{5}{12}}$.

2) משוואת המשיק: $y-0=-\frac{5}{12}(x-0)\Rightarrow \mathbf{y=-\frac{5}{12}x}$

ד. 1) שיעור ה- x של הנקודה B שווה לשיעור ה- x של הנקודה M. הנקודה B
נמצאת על המשיק לכן: $\Leftarrow y_B=-\frac{5}{12}\cdot 5=-2\frac{1}{12}$

$$MB=y_M-y_B=12+2\frac{1}{12}=\mathbf{14\frac{1}{12}}$$

(3 הגובה לצלע MB במשולש OMB שווה לשיעור ה- x של הנקודות M ו- B , כלומר 5.
מקבלים :

לכן $S_{\Delta OMB}=\frac{14\frac{1}{12}\cdot 5}{2}=35\frac{5}{12}\approx \mathbf{35.21}$

4. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 0.2x + \frac{45}{x}$.

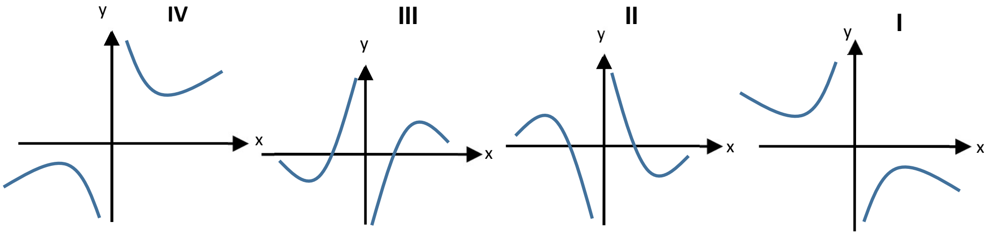
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את תחומי העלייה של הפונקציה.

ד. האם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? נמק.

ה. מבין הגרפים I , II , III , IV שלפניך מתאים לפונקציית $f(x)$? נמק.



פתרון:

א. תחום ההגדרה: $\mathbf{x \neq 0}$.

ב. $$f(x) = 0.2x + \frac{45}{x} \Rightarrow f'(x) = 0.2 - \frac{45}{x^2} = 0 \Rightarrow 0.2 = \frac{45}{x^2} \Rightarrow 0.2x^2 = 45 \Rightarrow$$

$$x^2 = 225 \Rightarrow x = \pm\sqrt{225} = \pm 15$$

$$f(15) = 0.2 \cdot 15 + \frac{45}{15} = 6 \ , \ f(-15) = 0.2 \cdot (-15) + \frac{45}{-15} = -6$$

התקבלו הנקודות $(15;6)$ ו- $(-15;-6)$

x	-15 < x	-15	-15 < x < 0	0	0 < x < 15	15	15 < x
f '(x)	+	0	-		-	0	+
f(x)	↗	Max	↘		↘	min	↗

$\Leftarrow f'(x) = 0.2 - \frac{45}{x^2}$

$$f'(-20) = 0.2 - \frac{45}{(-20)^2} > 0 \ , \ f'(-10) = 0.2 - \frac{45}{(-10)^2} < 0 \ ,$$

$$f'(10) = 0.2 - \frac{45}{(10)^2} < 0 \ , \ f'(20) = 0.2 - \frac{45}{(20)^2} > 0$$

קיבלנו: **(-15;-6) מקסימום , (15;6) מינימום**

ג. **תחומי העלייה: $x > 15 \ , \ x < -15$**

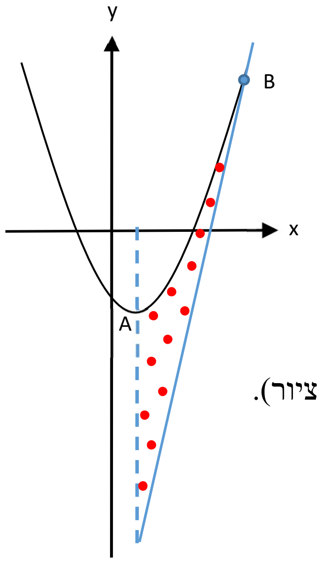
חיתוך עם ציר ה- x : נציב $f(x) = 0 \Leftarrow$ $0.2x^2 = -45 \Leftarrow 0.2x^2 + 45 = 0 \Leftarrow 0 = 0.2x + \frac{45}{x}$

גרף הפונקציה לא חותך את ציר ה- x $\Leftarrow$ אין פתרון $\Leftarrow x^2 = -225 \Leftarrow$

ד. גרף I לא מתאים כי עבור $x = -15$ יש לפונקציה נקודת מקסימום שנמצאת ברביע השלישי

גרפים II ו- III לא מתאימים כי גרף הפונקציה $f(x)$ לא חותך את ציר ה- x

גרף IV – מתאים. נקודת המינימום $(15;6)$ נמצאת ברביע הראשון , נקודת המקסימום $(-15;-6)$ נמצאת ברביע השלישי , גרף הפונקציה אינו חותך את הצירים .



5. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-4$.

הנקודה A היא נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. בנקודה B שבה $x=6$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ (ראה ציור).

1) מצא את שיפוע המשיק.

2) מצא את משוואת המשיק.

ג. דרך בנקודת הקיצון A העבירו ישר המקביל לציר ה- y (ראה ציור).
חשב את השטח המנוקד בציור- השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק והישר המקביל לציר ה-y.

.

<u>פתרון:</u>

א. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f'(x)=x-1=0 \Rightarrow x=1$

התקבלה הנקודה $\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot 1^2-1-4=-4.5 \Rightarrow$ **A(1;-4.5)**

ב. 1) לקבלת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה B צריך להציב את שיעור ה- x של הנקודה בנגזרת $f'(x)$: $f'(x)=x-1 \Rightarrow f'(6)=6-1=\mathbf{5}$

2) שיעור ה- y של הנקודה B: $f(6)=\frac{1}{2}\cdot 6^2-6-4=8 \Rightarrow B(6;8)$.

משוואת המשיק בנקודה B: $y-8=5(x-6) \Rightarrow y=5x-30+8 \Rightarrow$ **y = 5x - 22**.

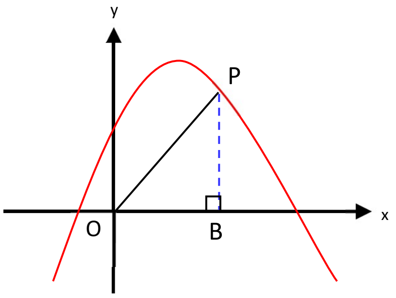
ג. משוואת הישר המקביל לציר ה- y בנקודה A היא $x=1$. מקבלים:

$$S=\int_1^6\left[(\frac{1}{2}x^2-x-4)-(5x-22)\right]dx=\int_1^6\left(\frac{1}{2}x^2-x-4-5x+22\right)dx=$$

$$\int_1^6\left(\frac{1}{2}x^2-6x+18\right)dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-6\cdot\frac{x^2}{2}+18x\right]_1^6=\left[\frac{x^3}{6}-3x^2+18x\right]_1^6=$$

$$=\left(\frac{6^3}{6}-3\cdot 6^2+18\cdot 6\right)-\left(\frac{1^3}{6}-3\cdot 1^2+18\cdot 1\right)=\frac{125}{6}=\mathbf{20\frac{5}{6}}$$

.6 הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 6x + 15$



ברביע הראשון (ראה ציור) . מהנקודה P מורידים אנך לציר ה- x. האנך חותך את ציר ה- x בנקודה B .

א. נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה P .

1) בטא באמצעות x את אורך הקטע PB .

2) בטא באמצעות x את אורך הקטע OB (O ראשית הצירים).

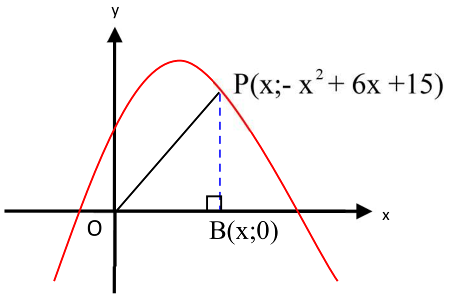
3) בטא באמצעות x את שטח המשולש POB .

ב. 1) מצא את שיעורי הנקודה P עבורם שטח המשולש POB יהיה מקסימלי .

2) חשב את השטח המקסימלי של המשולש OPB.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה f(x) בנקודה P שמצאת בסעיף ב-1).

<u>פתרון:</u>



א. 1) $PB = y_P - y_B = -x^2 + 6x + 15$

2) $OB = x_B - x_o = x \Rightarrow \mathbf{OB = x}$

3) $S_{\Delta POB} = \dfrac{OB \cdot PB}{2} = \dfrac{x(-x^2 + 6x + 15)}{2}$

$\Rightarrow \mathbf{S_{\Delta POB} = \dfrac{-x^3 + 6x^2 + 15x}{2}}$

ב. 1) $y = \dfrac{-x^3 + 6x^2 + 15x}{2} \Rightarrow y' = \dfrac{-3x^2 + 12x + 15}{2} = 0 \Rightarrow$

$-3x^2 + 12x + 15 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot(-3)\cdot 15}}{-6} = \dfrac{-12 \pm 18}{-6} \Rightarrow$

$x_1 = -1$, $x_2 = 5$. הפתרון ברביע הראשון הוא $x = 5$.

זיהוי הנקודה:

x	0	$0 < x < 5$	5	$5 < x$
f '(x)		+	0	-
f(x)		↗	Max	↘

עבור $x = 5$, שטח המשולש POB מקסימלי. שיעורי הנקודה P :

$x = 5 \Rightarrow f(5) = -5^2 + 6\cdot 5 + 15 = 20 \Rightarrow \mathbf{P(5;20)}$

2) $S_{\Delta POB} = \dfrac{-5^3 + 6\cdot 5^2 + 15\cdot 5}{2} = \mathbf{50}$

ג. שיפוע המשיק בנקודה P(5;20) הנמצאת על הפונקציה f(x) שווה לערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה זו : $f(x) = -x^2 + 6x + 15 \Rightarrow f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f'(5) = -2\cdot 5 + 6 = -4$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה f(x) בנקודה זו : $y - 20 = -4(x - 5)$. מקבלים:

$\mathbf{y = -4x + 40}$.

תשובות

1. א. 1) 30 ₪ 2) 42 ₪ ב. 1) 174 ₪ 2) 38.1%

2. א. 1) $A(-3;-9)$, $B(-17;-9)$ 2) $C(3;3)$ 3) 12 4) 84 ב. 2) 45

3. א. 1) 13 2) $(x-5)^2+(y-12)^2=169$ ב. 1) $x_A=5$ 2) $y_A=25$
ג. 1) $-\frac{5}{12}$ 2) $y=-\frac{5}{12}x$ ד. 1) $14\frac{1}{12}$ 2) ≈ 35.21

4. א. $x \neq 0$ ב. $(-15;-6)$ מקסימום , $(15;6)$ מינימום ג. $x<-15$, $x>15$
ד. אין ה. גרף IV

5. א. $A(1;-4.5)$ ב. 1) 5 2) $y=5x-22$ ג. $20\frac{5}{6}$

6. א. 1) $PB=-x^2+6x+15$ 2) $OB=x$ 3) $S_{\Delta POB}=\frac{-x^3+6x^2+15x}{2}$
ב. 1) $P(5;20)$ 2) 50 ג. $y=-4x+40$