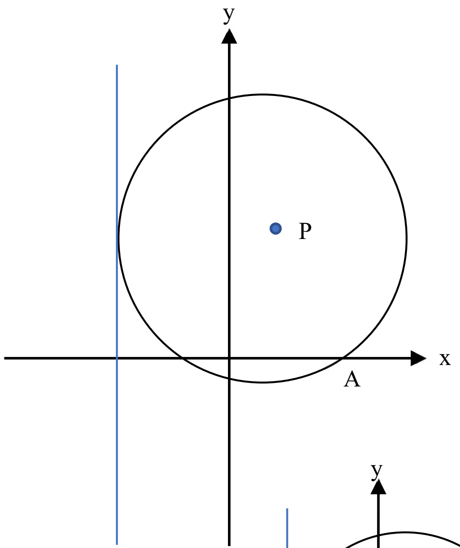
מבחן מס' 1

משך הבחינה: שעתיים ורבע

פרק ראשון: גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

ענה על שתיים שאלות מן השאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות)

1. מעגל שמרכזו בנקודה P משיק לישר $x = -4$ ועובר בנקודה $A(4;0)$ (ראה ציור).



א. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות P המקיימות את התנאים הנתונים.

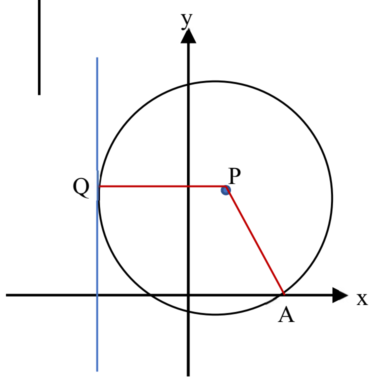
ב. הנקודה M נמצאת על המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א' וגם על הישר $y = 12$. מצא את משוואת המעגל M.

ג. המשיק למעגל M בנקודה A חותך את המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א' בנקודה B הנמצאת ברביע הרביעי. שטח המשולש MAB הוא 676.

1) חשב את מרחק הנקודה B מן הישר $x = -4$.

2) מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש ABM

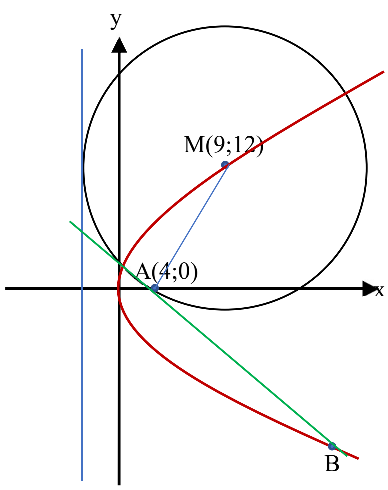
פתרון:



א. אם נסמן ב- Q את נקודת ההשקה של המעגל עם הישר $x = -4$, נקבל $PQ = PA$, PQ מאונך לישר $x = -4$.
כלומר, הנקודה P נמצאת במרחקים שווים מן הנקודה A ומן הישר $x = -4$. לכן, הנקודה P נמצאת על פרבולה שהמדריך שלה הוא הישר $x = -4$ $\Leftarrow \frac{p}{2} = 4 \Leftarrow$

משוואת הפרבולה: $\mathbf{y^2 = 16x}$.

ב. M נמצאת על הפרבולה לכן:



$12^2 = 16x \Rightarrow x = 9 \Rightarrow M(9;12)$. חישוב רדיוס המעגל M: מרחק הנקודה M מן הישר $x = -4$ הוא $9 + 4 = 13$. מתקבלת משוואת המעגל M:

$\mathbf{(x-9)^2 + (y-12)^2 = 169}$.

ג. 1) $MA \perp AB$ (רדיוס המעגל מאונך למשיק) לכן שטח המשולש MAB הוא $\frac{MA \cdot AB}{2} \Leftarrow$

$676 = \frac{13 \cdot AB}{2} \Rightarrow AB = 104 \Rightarrow$ מרחק הנקודה B, הנמצאת על הפרבולה, ממוקד הפרבולה $(4;0)$ הוא 104 ולכן מרחק הנקודה B מן הישר $x = -4$ הוא **104**.

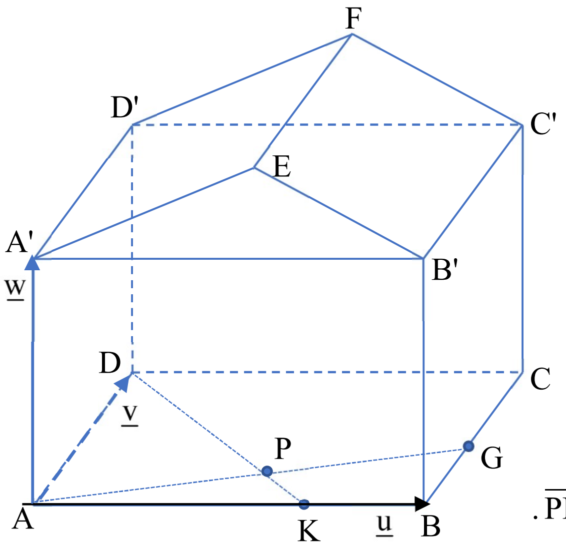
2) מקבלים: שיעור ה- x של הנקודה B הוא $104 - 4 = 100$. נציב במשוואת הפרבולה:

$y^2 = 16 \cdot 100 = 1600 \Rightarrow y = -40 \Rightarrow B(100;-40)$ (B ברביע הרביעי).

MB הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש ABM , לכן הנקודה (54.5;-14) , אמצע הקטע MB , היא מרכז המעגל . רדיוס המעגל:

$R=\sqrt{(54.5-9)^2+(-14-12)^2}=\sqrt{2746.25}$. מקבלים:

$$\mathbf{(x-54.5)^2+(y+14)^2=2746.25}.$$



2. נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' (ראה ציור).
הנקודות K ו- G נמצאות על המקצועות AB ו- BC בהתאמה כך שמתקיים :
$AK=\frac{2}{3}AB$, $BG=\frac{1}{3}BC$. הקטעים AG ו- DK נחתכים בנקודה P .
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

א. מצא את היחס בו מחלקת הנקודה P את הקטעים DK ו- AG .

ב. נתון הווקטור: $\overrightarrow{PE}=-\frac{1}{22}\underline{u}-\frac{2}{11}\underline{v}+\frac{14}{9}\underline{w}$.
הראה שהווקטור $\overrightarrow{KE}$ נמצא במישור הפאה ABB'A' .

ג. על התיבה ABCDA'B'C'D' בנויה מנסרה משולשת ישרה שבבסיסיה המשולשים שווי- השוקיים A'B'E ו- D'C'F (A'E = B'E ו- D'F = C'F).
הסבר מדוע $EF\perp EK$.

ד. התיבה סומנה במערכת צירים ונתון : D(0;0;0) , B'(12;15;18) , E(12;7.5;28).
1) מצא את שיעורי הנקודות P ו- F .
2) מצא את משוואת המישור EFC'B' .
3) האנך מנקודה A למישור EFC'B' חותך את המישור בנקודה N .
מצא את שיעורי הנקודה N .

<u>פתרון:</u>

א. נסמן : $\overrightarrow{KP}=\beta\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AG}$. $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KA}=\underline{0}$ $\Leftarrow$ $\alpha\overrightarrow{AG}-\beta\overrightarrow{KD}-\frac{2}{3}\underline{u}=\underline{0}$ $\Leftarrow$

$\alpha(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})-\beta(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD})-\frac{2}{3}\underline{u}=\underline{0}$ $\Leftarrow$ $\alpha(\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v})-\beta(-\frac{2}{3}\underline{u}+\underline{v})-\frac{2}{3}\underline{u}=\underline{0}$ $\Leftarrow$

$\alpha\underline{u}+\frac{\alpha}{3}\underline{v}+\frac{2\beta}{3}\underline{u}-\beta\underline{v}-\frac{2}{3}\underline{u}=\underline{0}$ $\Leftarrow$ $(\alpha+\frac{2\beta}{3}-\frac{2}{3})\underline{u}+(\frac{\alpha}{3}-\beta)\underline{v}=\underline{0}$ $\Leftarrow$

$(\alpha+\frac{2\beta}{3}-\frac{2}{3})\underline{u}+(\frac{\alpha}{3}-\beta)\underline{v}=0\underline{u}+0\underline{v}$ $\Leftarrow$ עקב יחידות ההצגה מקבלים: $\alpha+\frac{2\beta}{3}-\frac{2}{3}=0$

וגם $\frac{\alpha}{3}-\beta=0$ $\Leftarrow$ $\alpha=3\beta$ $\Leftarrow$ $3\beta+\frac{2\beta}{3}-\frac{2}{3}=0$ $\Leftarrow$ $9\beta+2\beta-2=0$ $\Leftarrow$ $11\beta=2$ $\Leftarrow$ $\beta=\frac{2}{11}$

$\Leftarrow$ $\alpha=\frac{6}{11}$ $\Leftarrow$ $\frac{AP}{AG}=\frac{6}{11}$ $\Leftarrow$ $\mathbf{AP:PG=6:5}$, $\frac{KP}{KD}=\frac{2}{11}$ $\Leftarrow$ $\mathbf{KP:PD=2:9}$

ב. $\underline{w}\frac{14}{9}+\underline{v}\frac{2}{11}-\underline{u}\frac{1}{22}-=\overrightarrow{PE} \Leftarrow \overrightarrow{KE}=\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{PE}=\frac{2}{11}\overrightarrow{KD}-\frac{1}{22}\underline{u}-\frac{2}{11}\underline{v}+\frac{14}{9}\underline{w}$

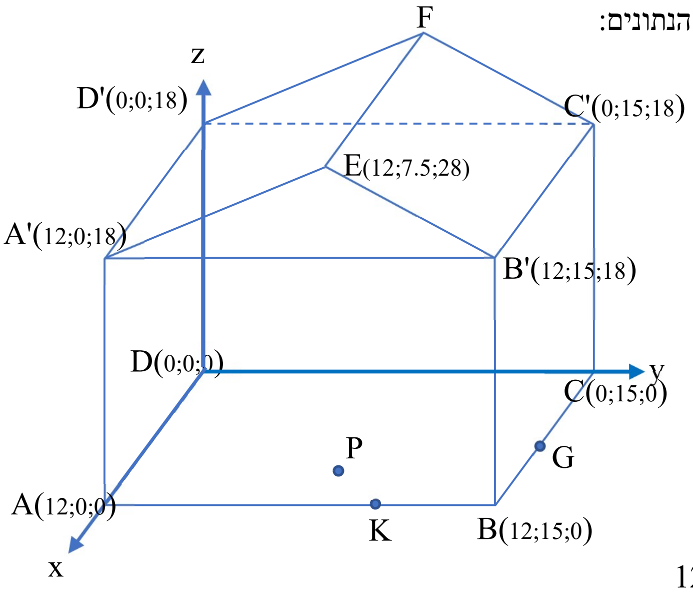
$\Leftarrow \overrightarrow{KE}=\frac{2}{11}(-\frac{2}{3}\underline{u}+\underline{v})-\frac{1}{22}\underline{u}-\frac{2}{11}\underline{v}+\frac{14}{9}\underline{w}=-\frac{4}{33}\underline{u}+\frac{2}{11}\underline{v}-\frac{1}{22}\underline{u}-\frac{2}{11}\underline{v}+\frac{14}{9}\underline{w}$

$\Leftarrow \mathbf{\overrightarrow{KE}=-\frac{1}{6}\underline{u}+\frac{14}{9}\underline{w}}$ $\Leftarrow$ הווקטור $\overrightarrow{KE}$ הוא קומבינציה ליניארית של $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ בלבד,

הנקודה K נמצאת במישור 'ABB'A הנפרש על-ידי הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$, לכן גם הנקודה E נמצאת באותו מישור.

ג. המנסרה 'A'B'EFC'D היא מנסרה ישרה, לכן EF מאונך למישור A'B'E. EK נמצא במישור A'B'E לכן EF מאונך לקטע EK (אנך למישור מאונך לכל ישר במישור העובר דרך עקבו)

ד. 1) השלמת שיעורי הקודקודים של התיבה על פי הנתונים:



$x_{B'}=x_B=x_A=x_{A'}=12$

$x_D=x_C=x_{C'}=x_{D'}=0$

$y_{B'}=y_B=y_C=y_{C'}=15$

$y_D=y_A=y_{A'}=y_{D'}=0$

$z_{B'}=z_{A'}=z_{C'}=z_{D'}=18$

$z_D=z_C=z_B=z_A=0$

מקבלים: $A(12;0;0)$, $B(12;15;0)$

$C(0;15;0)$, $A'(12;0;18)$

$C'(0;15;18)$, $D'(0;0;18)$,

$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{DA}=(12;0;0)\Rightarrow$

$12-x_F=12\Rightarrow x_F=0\ ,\ 7.5-y_F=0\ \Rightarrow$

$y_F=7.5\ ,\ 28-z_F=0\ \Rightarrow z_F=28\Rightarrow\ \mathbf{F(0;7.5;28)}$

$\underline{u}=\overrightarrow{AB}=(0;15;0)\ ,\underline{v}=\overrightarrow{AD}=(-12;0,0)\ ,\ \overrightarrow{AA'}=(0;0;18)$

$\overrightarrow{PE}=-\frac{1}{22}\underline{u}-\frac{2}{11}\underline{v}+\frac{14}{9}\underline{w}=-\frac{1}{22}(0;15;0)-\frac{2}{11}(-12;0;0)+\frac{14}{9}(0;0;18)\Rightarrow$

$\overrightarrow{PE}=(\frac{24}{11};-\frac{15}{22};28)\Rightarrow 12-x_P=\frac{24}{11},7.5-y_P=-\frac{15}{22},28-z_P=28\Rightarrow$

$\Rightarrow x_P=\frac{108}{11}=9\frac{9}{11}\ ,\ y_P=\frac{195}{22}=8\frac{19}{22}\ ,\ z_P=0\Rightarrow \mathbf{P(9\frac{9}{11};8\frac{2}{11};0)}$

2) $\overrightarrow{EB'}=(0;7.5;-10)$, $\overrightarrow{FE}=(12;0;0)$. מתקבלים ווקטורי הכיוון (1;0;0) ו- (0;3;-4) . ניעזר במכפלה ווקטורית של שני ווקטורי הכיוון הנ"ל שתוצאתה ווקטור המאונך לכל אחד מהם ונקבל:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = x(0-0)-y(-4-0)+z(3-0)+d=0\Rightarrow 4y+3z+d=0$$

נציב את שיעורי הנקודה $B'(12;15;18)$ ונקבל: $60+54+d=0 \Rightarrow d=-114$

התקבלה המשוואה : $\mathbf{4y+3z-114=0}$

3) הווקטור האנך למישור $EFC'B'$ הוא $(0;4;3)$. שיעורי הנקודה A הם $(12;0;0)$.

ההצגה הפרמטרית של הישר AN היא:

$\underline{x}=(12;0;0)+t(0;4;3)$. נוכל לסמן: $N(12;4t;3t)$.

נציב במשוואת המישור $EFC'B'$ ונקבל : $4\cdot 4t+3\cdot 3t-114=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25t=114 \Rightarrow t=4.56 \Rightarrow \mathbf{N(12;18.24;13.68)}$

3. א. 1) מצא את פתרונות המשוואה $z^5-1=0$.

2) מצא את מכפלת כל ערכי z שמצאת בסעיף 1).

ב. 1) $z_k=r\text{cis}\theta$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה. הנקודה A מתאימה למספר z_k

במישור של גאוס והנקודה B מתאימה למספר z_{k+1} .

חשב את הזווית $\measuredangle AOB$ (O ראשית הצירים).

2) z_P הוא אחד הפתרונות של המשוואה $z^5-1=0$ נמצא ברביע השלישי.

האם גם $\overline{z}_P$ הוא פתרון של המשוואה ? נמק.

3) הנקודה P מתאימה למספר z_P במישור של גאוס . הנקודה Q מתאימה למספר z_Q .

מסובבים את הקטע OP סיבוב של 90° נגד כיוון השעון לנקודה Q.

הראה כי : $z_Q=iz_P$.

<u>פתרון:</u>

א. 1) $z^5-1=0 \Rightarrow z^5=1 \Rightarrow z^5=\text{cis}360^\circ k \Rightarrow z_k=\text{cis}72^\circ k$

מקבלים: $\mathbf{cis0^o=1\,,\,cis72^o\,,\,cis144^o\,,\,cis216^o\,,\,cis288^o}$.

2) $1\cdot\text{cis}72^o\cdot\text{cis}144^o\cdot\text{cis}216^o\cdot\text{cis}288^o=\text{cis}(72^o+144^o+216^o+288^o)=$

$=\text{cis}720^o=\text{cis}0^o=\mathbf{1}$

ב. 1) $z_k=r\text{cis}\theta \Rightarrow z_{k+1}=r\text{cis}(\theta+72^\circ) \Rightarrow \measuredangle AOB=\theta+72^\circ-\theta=\mathbf{72^o}$

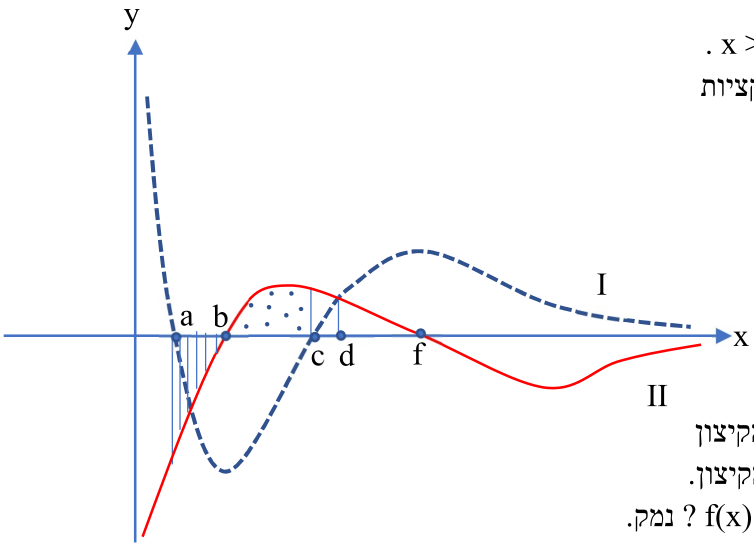
2) z_P נמצא ברביע השלישי לכן $180^o<\arg(z_P)<270^o \Rightarrow z_P=\text{cis}216^o$

פתרון $\Rightarrow \overline{z}_P=\text{cis}(-216^o)=\text{cis}(-216^o+360^o)=\text{cis}\ 144^o \Rightarrow \overline{z}_P$

3) $z_P=\text{cis}216^\circ \Rightarrow z_Q=\text{cis}(216^\circ+90^\circ)=\text{cis}216^\circ\cdot\ \text{cis}\ 90^\circ=z_P\cdot i=iz_P$.

פרק שני- גדילה ודעיכה, פונקציית חזקה , פונקציה מעריכית ולוגריתמית

4. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה בתחום $x > 0$.
בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות
$f(x)$ ו- $f'(x)$.



א. התאם לכל אחת מן הפונקציות
את אחד מן הגרפים I ו- II. נמק.
היעזר בשיעורי הנקודות שסומנו על
ציר ה-x וענה על סעיפים ב', ג' וד' :

ב. הראה שהשטח המקווקו בציור
שווה לשטח המנוקד.

ג. 1) מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון
של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון.
2) כמה נקודות הפיתול יש הפונקציה $f(x)$? נמק.

ד. נתון : $f(x)=\frac{(\ln x)^2-1}{x}$. מצא את a , b , c ו- f .

<u>פתרון :</u>

א. גרף I מתאים לפונקציה $f(x)$, גרף II מתאים לפונקציית הנגזרת $f'(x)$. הסבר :
נקודות האפס של גרף II מתאימים לשיעורי נקודות הקיצון של גרף I ; תחומי החיוביות/ שליליות של גרף II תואמים את תחומי העלייה/ירידה של גרף I .

ב. השטח המקווקו מתקבל מחישוב האינטגרל : $\int_a^b -f'(x)dx = f(a)-f(b) = 0-f(b) = -f(b)$

השטח המנוקד מתקבל מחישוב האינטגרל : $\int_b^c f'(x)dx = f(c)-f(b) = 0-f(b) = -f(b)$

לכן, השטחים שווים.

ג. 1)

x	0	< x <	b	< x <	f	< x
f '(x)		-	0	+	0	-
f(x)		↘	min	↗	Max	↘

x = b מינימום x = f מקסימום

2) **שתי נקודות פיתול** – לפונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$ יש שתי נקודות קיצון; היא עולה עד נקודת המקסימום וגם אחרי נקודת המינימום ,לכן בתחומים אלה $f''(x)$ חיובית והפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה. $f'(x)$ יורדת בין נקודת המקסימום לנקודת המינימום , לכן בתחום זה $f''(x)$ שלילית והפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה.

ד. $f(x)=\frac{(\ln x)^2-1}{x}$. מציאת a ו-c :

$f(x)=0\Rightarrow(\ln x)^2-1=0\Rightarrow\ln x=\pm1\Rightarrow x=\frac{1}{e},x=e\Rightarrow \mathbf{a=\frac{1}{e},c=e}$.

מציאת b ו-e :

$f'(x)=0, f'(x)=\dfrac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-(\ln^2 x-1)}{x^2}=\dfrac{-\ln^2 x+2\ln x+1}{x^2}=0\Rightarrow$.

$-\ln^2 x+2\ln x+1=0$, $\ln x_1=1+\sqrt{2}\Rightarrow x_1=e^{1+\sqrt{2}}=11.18,$

$\ln x_2=1-\sqrt{2}\Rightarrow x_2=e^{1-\sqrt{2}}=0.66\Rightarrow \mathbf{b=0.66,f=11.18}$

5. נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$: $f'(x)=\dfrac{e^x-5}{\sqrt{e^{2x}-7e^x-8}}-1$.

א. 1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f'(x)$.

2) מצא את האסימפטוטות לגרף הפונקציה $f'(x)$ המקבילות לצירים.

3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

4) הנקודה $(\ln17;-0.06)$ היא נקודת מינימום והנה נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f'(x)$.
סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.

ב. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום בו מוגדרת $f'(x)$.

1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של הפונקציה $f(x)$.

ג. הערך המקסימלי של הפונקציה $f(x)$ הוא 5. הישרים $x=\ln8$ ו- $y=3$ הם אסימפטוטות לגרף הפונקציה $f(x)$.

1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

2) S הנו השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f'(x)$, ציר ה- x והישר $x=4$.
קבע איזו מן הטענות הבאות נכונה ונמק את קביעתך:

1) $0<S<2$ 2) $S>5$ 3) $3<S<5$ 4) $2<S<3$

<u>פתרון:</u>

א. 1) תחום ההגדרה : $e^{2x}-7e^x-8>0$. נציב $e^x=t$ ונקבל : $t^2-7t-8>0$.

$t^2-7t-8>0\Rightarrow(t-8)(t+1)>0\Rightarrow t>8\cup t<-1$

מקבלים : $e^x<-1$ אין פתרון , או , $e^x>8\Rightarrow \mathbf{x>\ln 8}$

2) אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x :

$x\to\ln8\Rightarrow f'(x)\ \to\ \frac{3}{0}-1\to\infty$. הישר $\mathbf{x=\ln8}$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y :

$x\to\infty\Rightarrow f'(x)\ \to\ \dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}}}-1\to\dfrac{e^x}{e^x}-1\to0$. הישר $\mathbf{y=0}$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

הפונקציה מוגדרת בתחום $x > \ln8$ לכן זאת האסימפטוטה היחידה המאונכת לציר ה- y .

3) הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$ לכן אין לה נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

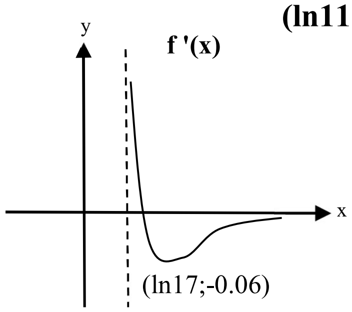
נקודת חיתוך עם ציר ה- x :

$$0=\frac{e^x-5}{\sqrt{e^{2x}-7e^x-8}}-1\Rightarrow\frac{e^x-5}{\sqrt{e^{2x}-7e^x-8}}=1\Rightarrow e^x-5=\sqrt{e^{2x}-7e^x-8}\Rightarrow$$

$$e^{2x}-10e^x+25=e^{2x}-7e^x-8\Rightarrow 3e^x=33\Rightarrow e^x=11\Rightarrow x=\ln11$$

בדיקה: $11-5=\sqrt{11^2-7\cdot11-8}\Leftarrow 6=\sqrt{36}\Leftarrow$ **$(\ln11;0)$**

4)



ב. 1)

x	ln8	$<x<$	ln11	$<x$
f '(x)		+	0	-
f(x)		↗	Max	↘

תחום העלייה : $\ln8 < x < \ln11$, תחום ירידה: $x > \ln11$

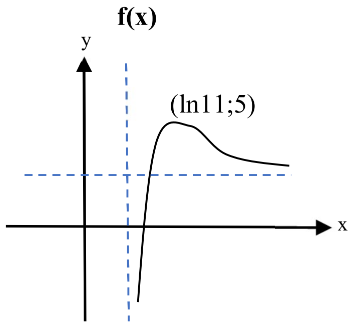
2)

x	ln8	$<x<$	ln17	$<x$
f '(x)		↘	min	↗
f ''(x)		-	0	+
f(x)		$\cap$	פיתול	$\cup$

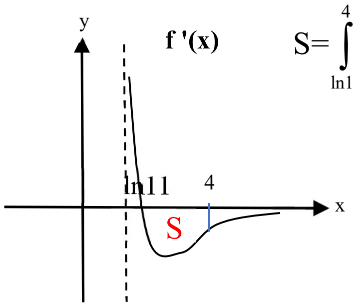
תחום הקעירות כלפי מעלה $\cup$: $x > \ln17$

תחום הקעירות כלפי מטה $\cap$: $\ln8 < x < \ln17$

ג. 1)



2) $S=\int_{\ln11}^{4}-f'(x)dx=\left[-f(x)\right]_{\ln11}^{4}=f(\ln11)-f(4)=5-f(4)$



על פי גרף הפונקציה $f(x)$, $3 < f(4) < 5$.

$f(4)=5-S \Rightarrow 5-S>3$ וגם $5-S<5$

לכן $0<S<2$.

הטענה הנכונה היא **טענה 1)**

תשובות

1. **א.** $y^2=16x$ **ב.** $(x-9)^2+(y-12)^2=169$

ג. 1) 104 2) $(x-54.5)^2+(y+14)^2=2746.25$

2. **א.** $AP:PG=6:5$, $KP:PD=2:9$ **ג.** 2) $\sphericalangle EB'A'$

ד. 1) $F(0;7.5;28)$, $P(9\frac{9}{11};8\frac{2}{11};0)$

2) $4y+3z-114=0$ 3) $N(12;18.24;13.68)$

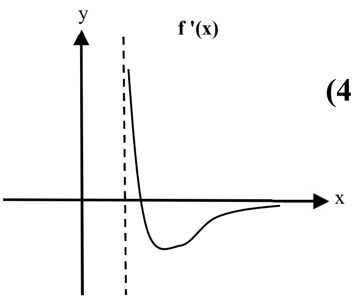
3. **א.** 1) $cis0^o=1, cis72^o, cis144^o, cis216^o, cis288^o$ 2) 1

ב. 1) $\sphericalangle AOB=72^o$ 2) כן

4. **א.** גרף I – $f(x)$, גרף II – $f'(x)$ **ג.** 1) $x=b$ מינימום $x=f$ מקסימום 2) שתי נקודות פיתול

ד. $c=e$, $a=\frac{1}{e}$, $b=0.66, f=11.18$

5. **א.** 1) $x>\ln 8$ 2) $x=\ln 8$, $y=0$ 3) $(\ln 11;0)$ 4)

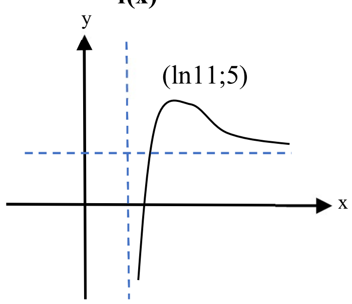


ב. 1) תחום עלייה: $\ln 8<x<\ln 11$, תחום ירידה: $x>\ln 11$

2) תחום הקעירות כלפי מעלה $\cup$: $x>\ln 17$

תחום הקעירות כלפי מטה $\cap$: $\ln 8<x<\ln 17$

ג. 1) f(x) 2) טענה 1)

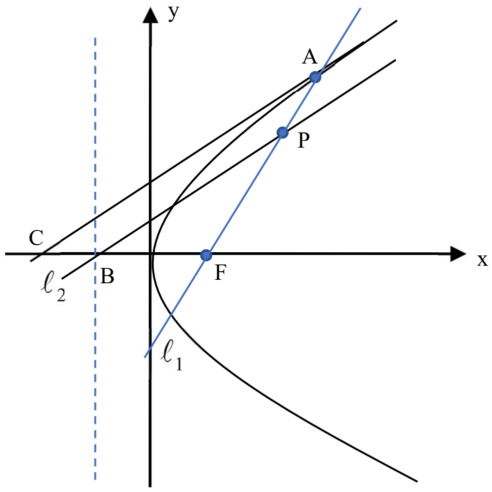


מבחן מס' 2

משך הבחינה: שעתיים ורבע

פרק ראשון: גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

ענה על שתיים שאלות מן השאלות 3-1 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות)



1. בנקודה כלשהי A הנמצאת על הפרבולה $y^2 = 8x$
מעבירים ישר החותך את ציר ה- x בנקודה C.
נתון: $x_C = -x_A$. הנקודה F היא מוקד הפרבולה.
ℓ_1 הוא ישר העובר דרך הנקודות F ו- A .
הנקודה B היא נקודת החיתוך של מדריך הפרבולה עם ציר ה- x . הישר ℓ_2 עובר דרך הנקודה B ומקביל לישר AC.

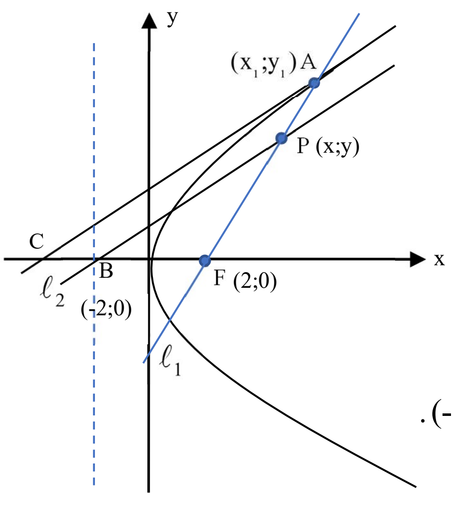
א. הראה שהמקום הגיאומטרי של נקודות החיתוך של הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 הוא מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה ומשיק למדריך הפרבולה.

ב. הפרבולה $y^2 = 8x$ והמעגל שמצאת בסעיף א' נחתכים בנקודות K ו- L . הראה שהמיתר KL עובר דרך מרכז המעגל.

ג. המעגל שמצאת בסעיף א' חותך את חלקו החיובי של ציר ה- y בנקודה E .
הישר עליו נמצא קוטר המעגל היוצא מנקודה E , חותך את המעגל בנקודה נוספת Q ואת הפרבולה בנקודה T הנמצאת ברביע הרביעי.

1) מצא את שיעורי הנקודות E ו- Q .

2) מצא את משוואת הישר BQ .



פתרון:

א. נסמן: $A(x_1;y_1)$, $P(x;y)$. הנקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2 = 8x$ לכן מתקיים: $y_1^2 = 8x_1$, $x_1 \geq 0$.
נוכל לסמן : $A(\frac{y_1^2}{8};y_1)$. F מוקד הפרבולה $y^2 = 8x$,
לכן שיעורי $F(2;0)$. מדריך הפרבולה הוא הישר $x = -2$
ולכן שיעורי הנקודה B הם $B(-2;0)$. שיעורי הנקודה C : $(-x_1;0)$.

שיפוע הישר AC הוא : $\frac{4}{y_1}=\frac{y_1}{2\cdot\frac{y_1^2}{8}}=\frac{y_1}{2x_1}$ ולכן גם שיפוע הישר ℓ_2 הוא $\frac{4}{y_1}$. מקבלים:

$\frac{y}{x+2}=\frac{4}{y_1}\Leftarrow y_1=\frac{4(x+2)}{y}$. הנקודות A , P ו- F נמצאות על אותו ישר ,

לכן השיפוע של הישר AF שווה לשיפוע הישר PF ומקבלים :

$$\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{y}{x-2}\Rightarrow y_1(x-2)=y(x_1-2)\Rightarrow\frac{4(x+2)}{y}\cdot(x-2)=y(x_1-2)\Rightarrow$$

$$\frac{4(x+2)(x-2)}{y^2}=x_1-2\Rightarrow x_1=\frac{4(x+2)(x-2)}{y^2}+2=\frac{4(x^2-4)+2y^2}{y^2}\Rightarrow$$

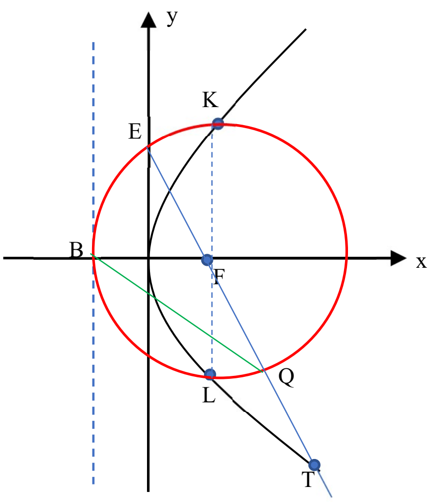
$$x_1=\frac{4x^2-16+2y^2}{y^2}.$$

נציב במשוואה $y_1^2=8x_1$ ונקבל : $\left(\frac{4(x+2)}{y}\right)^2=8\left(\frac{4x^2-16+2y^2}{y^2}\right)\Leftarrow$

$$\frac{16(x^2+4x+4)}{y^2}=\frac{8(4x^2-16+2y^2)}{y^2}\Rightarrow 2(x^2+4x+4)=4x^2-16+2y^2\Rightarrow$$

$$2x^2+8x+8=4x^2-16+2y^2\Rightarrow 2x^2-8x+2y^2=24\Rightarrow x^2-4x+y^2=12\Rightarrow$$

$$\mathbf{(x-2)^2+y^2=16}$$



ב. פתרון מערכת המשוואות של הפרבולה והמעגל:

$y^2=8x$ וגם $(x-2)^2+y^2=16 \Leftarrow (x-2)^2+8x=16$

$\Leftarrow x^2+4x-12=0 \Leftarrow x_2=-6\ ,\ x_1=2$. $x>0$

לכן , עבור $x=2$ מקבלים $y=\pm4$ ומתקבלות הנקודות :

K(2;4) ו- L(2;-4) (או להיפך). הנקודות נמצאות על הישר

$x=2$ לכן הקוטר KL עובר דרך מרכז המעגל (2;0) .

ג. 1) נציב $x=0$ במשוואת המעגל : $4+y^2=16 \Leftarrow y=\pm\sqrt{12}$.

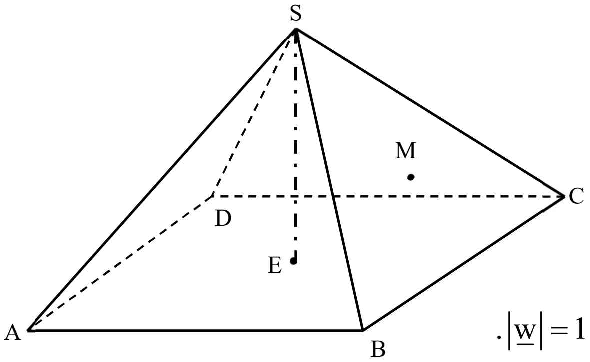
שיעורי הנקודה E : $\mathbf{E(0;\sqrt{12})}$.

מרכז המעגל F(2;0) הוא אמצע הקוטר EQ לכן :

$$2=\frac{0+x_Q}{2}\Rightarrow x_Q=4\ ,\ 0=\frac{\sqrt{12}+y_Q}{2}\Rightarrow y_Q=-\sqrt{12}\Rightarrow \mathbf{Q(4;-\sqrt{12})}$$

2) $B(-2;0)\ ,\ Q(4;-\sqrt{12}) \Leftarrow m_{BQ}=\frac{\sqrt{12}}{-6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. משוואת הישר BQ : $\mathbf{y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)}$.

2. SABCD פירמידה ישרה שבסיסה מלבן ABCD.
E נקודת מפגש אלכסוני המלבן ABCD. M היא נקודת מפגש התיכונים של הפאה SBC.



נתון: $\overrightarrow{SE}=\underline{u}$, $\overrightarrow{SM}=2\underline{v}$, $\overrightarrow{SC}=\underline{w}$.

א. הבע את $\overrightarrow{BC}$ ואת $\overrightarrow{AB}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

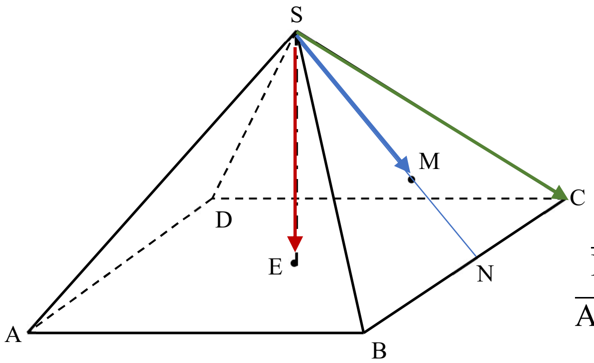
ב. נתון: $|\underline{u}|=12$. חשב את $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ו- $\underline{u}\cdot\underline{w}$.

ג. נתון: $S(-1;2;9)$, $\underline{v}=(3;0;-4)$, $\underline{u}=(0;0;t)$, $|\underline{w}|=18$.

1) מצא את t.
2) מצא את הזוויות $\sphericalangle ESM$ ו- $\sphericalangle ESC$.
3) מצא את שיעורי הנקודה M.
4) מצא משוואת מישור המאונך ל- EM ועובר דרך הנקודה M.
5) האם הנקודה S נמצאת על המישור שמצאת בסעיף הקודם ? נמק.

<u>פתרון:</u>

לפי נתונים : SE הוא גובה הפירמידה הישרה , לכן $\overrightarrow{SE}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SE}\perp\overrightarrow{BC}$.



ABCD מלבן , לכן $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}$. M מפגש התיכונים במשולש SBC לכן , אם נסמן ב- N את אמצע הצלע BC אז $\overrightarrow{SM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SN}$. SB = SC

לכן $\overrightarrow{SN}\perp\overrightarrow{BC}$.

א. $\overrightarrow{SM}=2\underline{v}\Rightarrow\overrightarrow{SN}=3\underline{v}$.

$$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{NC}=2(\overrightarrow{NS}+\overrightarrow{SC})=2(-3\underline{v}+\underline{w})=\mathbf{2\underline{w}-6\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{EN}=2(\overrightarrow{ES}+\overrightarrow{SN})=2(-\underline{u}+3\underline{v})=\mathbf{-2\underline{u}+6\underline{v}}$$

ב. נתון : $|\underline{u}|=12$. מקבלים :

$$\overrightarrow{SE}\perp\overrightarrow{EC}\Rightarrow\underline{u}\cdot(-\underline{u}+\underline{w})=0\Rightarrow-|\underline{u}|^2+\underline{u}\cdot\underline{w}=0\Rightarrow\underline{u}\cdot\underline{w}=|\underline{u}|^2=\mathbf{144}\ .$$

$$\overrightarrow{SE}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\underline{u}\cdot(-2\underline{u}+6\underline{v})=0\Rightarrow-2\cdot144+6\underline{u}\cdot\underline{v}=0\Rightarrow\underline{u}\cdot\underline{v}=\mathbf{48}$$

ג. 1) $\underline{u}\cdot\underline{v}=48\Rightarrow(0;0;t)\cdot(4;0;-4)=48\Rightarrow-4t=48\Rightarrow\mathbf{t=-12}$

2) $|\underline{u}|=12$, $|\underline{w}|=18$, $\underline{v}=(3;0;-4)\Rightarrow|\underline{v}|=\sqrt{9+16}=5$, $\underline{u}\cdot\underline{w}=144$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=48$.

מקבלים: $\cos\sphericalangle ESM=\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}=\dfrac{48}{12\cdot5}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\sphericalangle\mathbf{ESM=36.87^o}$

$$\cos\sphericalangle ESC=\frac{\underline{u}\cdot\underline{w}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{w}|}=\frac{144}{12\cdot18}=\frac{2}{3}\Rightarrow\sphericalangle\mathbf{ESC=48.19^o}$$

3) $\overrightarrow{SM}=2\underline{v}=2(3;0;-4)=(6;0;-8)$, $S(-1;2;9)\Rightarrow x_M+1=6;y_M-2=0;z_M-9=-8$

$$\Rightarrow x_M=5;y_M=2;z_M=1\Rightarrow\mathbf{M(5;2;1)}$$

4) $\underline{u}=(0;0;-12)\Rightarrow x_E+1=0;y_E-2=0;z_E-9=-12\Rightarrow$

$$x_E=-1;y_E=2;z_E=-3 \Rightarrow E(-1;2;-3)$$

$$\overleftrightarrow{EM}=(5+1;2-2;1+3)=(6;0;4)$$

כיוון הווקטור האנך למישור הוא (3;0;2)

משוואת המישור : $3x+2z+d=0$. נציב את שיעורי הנקודה M ונקבל:

$15+2+d=0 \Rightarrow d=-17$. משוואת המישור היא: $\mathbf{3x+2z-17=0}$

5) נציב את שיעורי הנקודה S(-1;2;9) במשוואת המישור: $-3+18-17\neq 0$

לכן , הנקודה S **לא** נמצאת על המישור.

3. שני מקומות גיאומטריים מקיימים : $\text{I. } |z-4|=4 \quad \text{II. } z\cdot\bar{z}-6(\bar{z}+z)=0$

א. 1) הראה שכל אחד מן המקומות הגיאומטריים מייצג מעגל ומצא את משוואות המעגלים.

2) סרטטו את המעגלים במערכת צירים.

ב. 1) מצא את פתרונות המשוואה: $z^2-12z+\left(64+16\sqrt{2}\cdot i\right)=0$.

2) הראה שהנקודות במישור של גאוס המתאימות לפתרונות המשוואה z_1 ו- z_2 נמצאות על מעגל II.

ג. אחד מפתרונות המשוואה נמצא ברביע הראשון בנקודה A . מנקודה A מורידים אנך לציר ה- x . אנך זה חותך את מעגל I. בנקודה B . O היא ראשית הצירים .

1) רשום את z_A ואת z_B בצורה : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

2) מצא את $\frac{z_A}{z_B}$.

3) מצא , על פי הסעיף הקודם , את הזווית $\sphericalangle AOB$.

<u>פתרון:</u>

א. 1) I. $|z-4|=4$. נסמן : $z=x+yi$ ונקבל: $|x+yi-4|=4 \Leftarrow |(x-4)+yi|=4 \Leftarrow$

$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=4 \Leftarrow \mathbf{(x-4)^2+y^2=16}$.

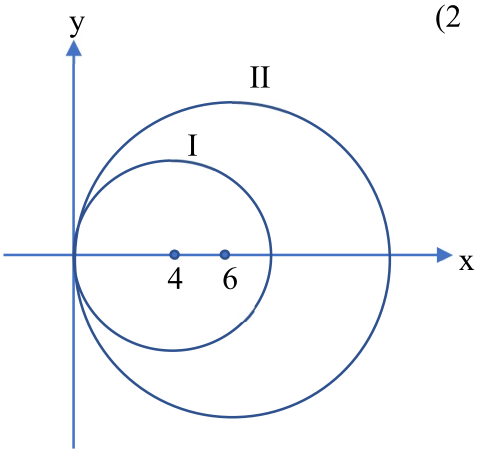
התקבל מעגל שמרכזו בנקודה (4;0) ומחוגו 4 .

II. $z\cdot\bar{z}-6(\bar{z}+z)=0 \Leftarrow (x+yi)\cdot(x-yi)-6(x-yi+x+yi)=0 \Leftarrow$

$x^2+y^2-12x=0 \Leftarrow \mathbf{(x-6)^2+y^2=36}$.

התקבל מעגל שמרכזו בנקודה (6;0) ומחוגו 6 .

(2



ב. 1) : $z^2-12z+\left(64+16\sqrt{2}\cdot i\right)=0 \Leftarrow$

$$z_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-4\left(64+16\sqrt{2}\cdot i\right)}}{2}=$$

$$=\frac{12\pm\sqrt{-112-64\sqrt{2}\cdot i}}{2}=$$

$$\frac{12\pm4\sqrt{-7-4\sqrt{2}\cdot i}}{2}=6\pm2\sqrt{-7-4\sqrt{2}\cdot i}$$

נסמן: $\sqrt{-7-4\sqrt{2}\cdot i}=a+bi$. נקבל: $-7-4\sqrt{2}\cdot i=\left(a^2-b^2\right)+2abi$.

$\Leftarrow a^2-b^2=-7$ וגם $2ab=-4\sqrt{2} \Leftarrow b=-\dfrac{2\sqrt{2}}{a} \Leftarrow a^2-\dfrac{8}{a^2}=-7$

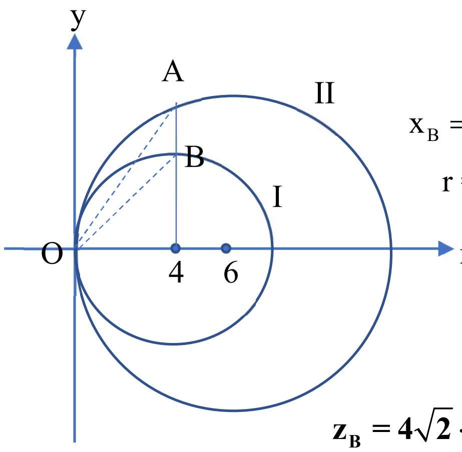
$\Leftarrow a^4+7a^2-8=0 \Leftarrow a^2=1 \Leftarrow a=\pm1$. עבור $a=1$ נקבל $b=-2\sqrt{2} \Leftarrow$

לכן: $a+bi=\pm\left(1-2\sqrt{2}i\right)$. $z_{1,2}=6\pm2(1-2\sqrt{2}\cdot i)$. מקבלים:

$\mathbf{z_1=8-4\sqrt{2}\cdot i\,,\ z_2=4+4\sqrt{2}\cdot i}$.

II (2. $(x-6)^2+y^2=36$. עבור z_1 מקבלים: $(8-6)^2+\left(-4\sqrt{2}\right)^2=4+32=36$

עבור z_2 מקבלים: $(4-6)^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2=4+32=36$. לכן, הנקודות במישור של גאוס המתאימות למספרים z_1 ו- z_2 נמצאות על מעגל II.



ג. 1) $z_A=4+4\sqrt{2}\cdot i$ (ברביע הראשון)

$x_B=4\Rightarrow(4-4)^2+y^2=16\Rightarrow y=4\Rightarrow z_B=4+4i$

$z_A=4+4\sqrt{2}\cdot i$: $\Leftarrow r=\sqrt{16+32}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

$\tan\theta=\sqrt{2}$, $0^\circ<\theta<90^\circ \Leftarrow \theta=54.74^\circ$

$\Leftarrow \mathbf{z_A=4\sqrt{3}\cdot cis\left(54.74^o\right)}$

$z_B=4+4i$: $\Leftarrow r=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\tan\theta=1$, $0^\circ<\theta<90^\circ \Leftarrow \theta=45^\circ \Leftarrow \mathbf{z_B=4\sqrt{2}\cdot cis\left(45^o\right)}$

(2 $\dfrac{z_A}{z_B}=\dfrac{4\sqrt{3}\cdot cis\left(54.74^\circ\right)}{4\sqrt{2}\cdot cis\left(45^\circ\right)}=\sqrt{\mathbf{1.5}}\mathbf{cis\left(9.74\right)}$

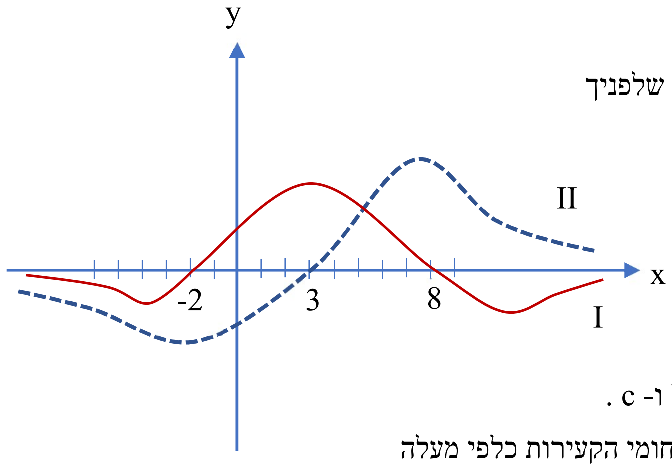
3) הזווית שיוצר הקטע AO עם כיוון החיובי של ציר ה- x היא בת 54.74°

והזווית שיוצר הקטע BO עם כיוון החיובי של ציר ה- x היא בת 45° , לכן,

$\sphericalangle AOB=54.74^\circ-45^\circ=\mathbf{9.74^o}$.

פרק שני- גדילה ודעיכה, פונקציית חזקה , פונקציה מעריכית ולוגריתמית

ענה על אחת מבין השאלות 4-5 ($33\frac{1}{3}$ נקודות)



4. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל ערך של x . בציור שלפניך מתוארים הגרפים של $f'(x)$ ו- $f''(x)$.

א. התאם כל אחד מן הגרפים I ו- II לפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$. נמק את קביעתך.

ב. נתון : $f(x)=\ln(\frac{1}{2}x^2+bx+c)$.

1) היעזר בנתונים הרשומים בציור ומצא את b ו- c .

2) מצא את תחומי העלייה , תחומי הירידה , תחומי הקעירות כלפי מעלה ואת תחומי הקעירות כלפי מטה של הפונקציה $f(x)$.

3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

4) חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות I ו- II , הישר $x=-2$ והישר $x=3$.

ג. נתונות הפונקציות $g(x)=f(x)+k$ ו- $h(x)=\ln(x^2+2bx+2c)$.

מצא את הערך של k עבורו מתקיים : $g(x)=h(x)$.

פתרון:

א. **גרף I מתאים ל- $f''(x)$, גרף II מתאים ל- $f'(x)$.**

הסבר : שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של פונקציה II תואמים לנקודות האפס של פונקציה I .
תחומי העלייה והירידה של פונקציה II תואמים לתחומי החיוביות והשליליות של פונקציה I .

ב. 1) על פי הנתונים בציור מתקיים : $f''(-2)=f''(8)=0$, $f'(3)=0$. לכן :

$$f'(x)=\frac{x+b}{\frac{1}{2}x^2+bx+c}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x+b=0\Rightarrow f'(3)=0\Rightarrow \mathbf{b=-3}$$

$$f'(x)=\frac{x-3}{\frac{1}{2}x^2-3x+c}\Rightarrow f''(x)=\frac{\frac{1}{2}x^2-3x+c-(x-3)(x-3)}{\left(\frac{1}{2}x^2-3x+c\right)^2}=\frac{-\frac{1}{2}x^2+3x+c-9}{\left(\frac{1}{2}x^2-3x+c\right)^2}$$

$$f''(-2)=0\Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot 4-6+c-9=0\Rightarrow \mathbf{c=17}$$

(2 $f(x)=\ln(\frac{1}{2}x^2-3x+17)$, $f'(x)=\dfrac{x-3}{\frac{1}{2}x^2-3x+17}$, $f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}x^2+3x+8}{\left(\frac{1}{2}x^2-3x+17\right)^2}$

מציאת תחומי עלייה וירידה :

x	x <	3	< x
f '(x)	-	0	+
f(x)	↘	min	↗

תחום העלייה : $x>3$, תחום הירידה : $x<3$

מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה / מטה :

x	x <	-2	< x <	8	<x
f "(x)	-	0	+	0	-
f(x)	∩	פיתול	∪	פיתול	∩

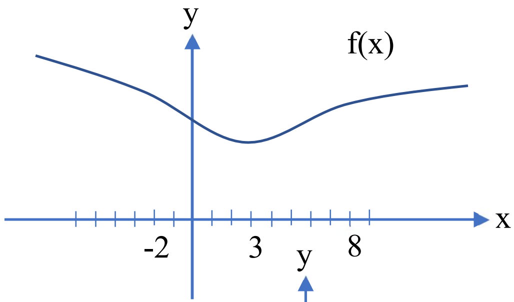
תחום הקעירות כלפי מעלה : $-2<x<8$,

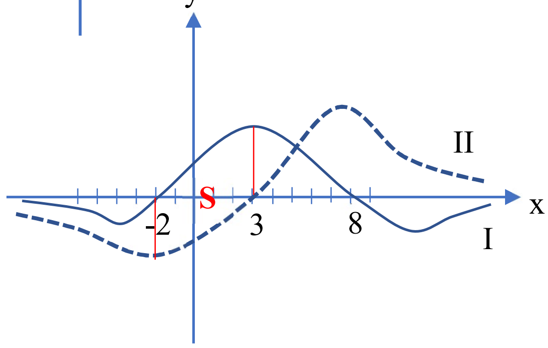
תחומי הקעירות כלפי מטה : $x<-2$ או $x>8$

(3 $f(3)=\ln(12.5)=2.53$

$f(-2)=\ln(25)=3.22$, $f(8)=\ln(25)=3.22$

מקבלים:





(4 $S=\int_{-2}^{3}\left(f''(x)-f'(x)\right)dx=$

$=\left[f'(x)-f(x)\right]_{-2}^{3}=$

$\left[f'(3)-f(3)\right]-\left[f'(-2)-f(-2)\right]=$

$=\left[0-\ln(12.5)\right]-\left[-\frac{1}{5}-\ln(25)\right]=\mathbf{0.893}$

ג. $f(x)=\ln(\frac{1}{2}x^2-3x+17)\Rightarrow g(x)=\ln(\frac{1}{2}x^2-3x+17)+k$

$h(x)=\ln(x^2+2bx+2c)\Rightarrow h(x)=\ln(x^2-6x+34)=\ln\left[2(\frac{1}{2}x^2-3x+17)\right]=$

$\ln 2+\ln(\frac{1}{2}x^2-3x+17)\Rightarrow h(x)=f(x)+\ln 2$

$g(x)=f(x)+k$, $h(x)=g(x)\Rightarrow \mathbf{k=\ln 2}$

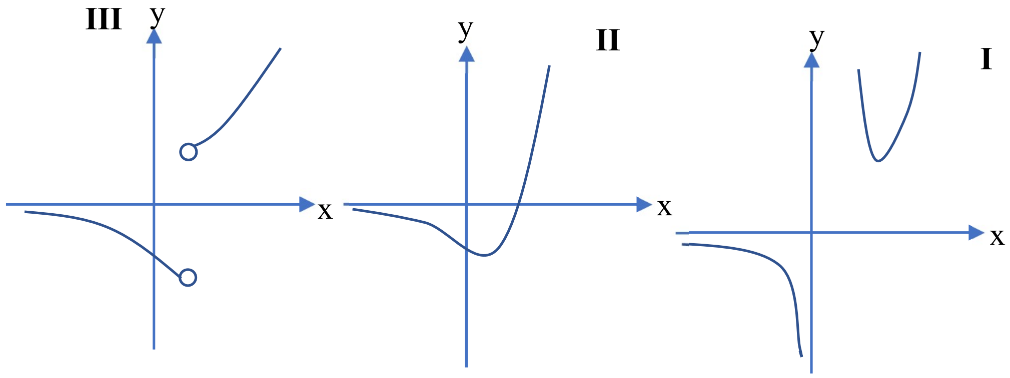
5. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{e^{2x}-8e^x+c}$, $c>0$.

א. מצא אסימפטוטה לגרף הפונקציה המקבילה לציר ה- x (בטא באמצעות c לפי הצורך).

ב. מצא את תחום ההגדרה , את נקודות החיתוך עם הצירים (אם יש כאלה) , את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוג הקיצון , עבור :

1) $c=7$ (2 $c=16$ (3 $c=20$.

ג. נתון : $g(x)=f'(x)$. בציור שלפניך מתוארים הגרפים של $g(x)$ עבור כל אחד מערכי c הרשומים בסעיף ב'.



1) התאם לכל אחד מן הגרפים I , II , III את הערך של c . נמק קביעתך.

2) הראה כי בתחום $x<0$, גרף הפונקציה II נמצא מעל גרף הפונקציה I .

3) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה I , גרף הפונקציה II, הישר $x=-2$ והישר $x=-1$.

ד. נתון : $c=20$. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

<u>פתרון:</u>

א. $f(x)=\sqrt{e^{2x}-8e^x+c}$, $c>0$.

אין אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x עבור $x\to\infty$ $\Rightarrow f(x)\to\infty\Rightarrow x\to\infty$

אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x : $x\to-\infty\Rightarrow f(x)\to\sqrt{c}\Rightarrow \mathbf{y=\sqrt{c}}$

ב. 1) עבור $c=7$: $f(x)=\sqrt{e^{2x}-8e^x+7}$

תחום ההגדרה : $e^{2x}-8e^x+7\ge0\Rightarrow e^x=t\Rightarrow t^2-8t+7\ge0\Rightarrow t\ge7\cup t\le1$

$e^x\ge7\cup e^x\le1\Rightarrow$ $\mathbf{x\le0}$ **או** $\mathbf{x\ge\ln7}$

נקודות חיתוך עם הצירים : $\mathbf{(0;0)}$, $\mathbf{(\ln7;0)}$

נקודות הקיצון: $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-8e^x}{2\sqrt{e^{2x}-8e^x+7}}=\dfrac{e^{2x}-4e^x}{\sqrt{e^{2x}-8e^x+7}}=0\Rightarrow e^{2x}-4e^x=0$

$e^x(e^x-4)=0\Rightarrow e^x=4\Rightarrow x=\ln4\Rightarrow$

לא בתחום ההגדרה של הפונקציה , לכן, אין נקודות קיצון פנימיות .

x	$x<0$	0		ln7	$x>\ln7$
$f'(x)$	-				+
$f(x)$	↘	min		min	↗

נקודות הקצה: **(0;0) מינימום , (ln7;0) מינימום**

2) עבור $c=16$: $f(x)=\sqrt{e^{2x}-8e^x+16}$

תחום ההגדרה : נכון לכל t $\Leftarrow e^{2x}-8e^x+16\ge0 \Rightarrow e^x=t \Rightarrow t^2-8t+16\ge0$

מקבלים : **הפונקציה מוגדרת לכל ערך של x**

נקודות חיתוך עם הצירים : $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{e^{2x}-8e^x+16}=0 \Rightarrow t^2-8t+16=0 \Rightarrow t=4$

מקבלים: $\Rightarrow e^x=4 \Rightarrow x=\ln4 \Rightarrow$ **(ln4;0)**

נקודת חיתוך עם ציר ה- y : $f(0)=\sqrt{9} \Rightarrow$ **(0;3)**

נקודות קיצון: $f'(x)=\dfrac{e^{2x}-4e^x}{\sqrt{e^{2x}-8e^x+16}}=0 \Rightarrow e^{2x}-4e^x=0 \Rightarrow e^x=4 \Rightarrow x=\ln4$

x	$x<\ln4$	ln4	$x>\ln4$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘	min	↗

(ln4;0) נקודת מינימום

3) עבור $c=20$: $f(x)=\sqrt{e^{2x}-8e^x+20}$

תחום ההגדרה : נכון לכל t $\Leftarrow e^{2x}-8e^x+20\ge0 \Rightarrow e^x=t \Rightarrow t^2-8t+20\ge0$

מקבלים : **הפונקציה מוגדרת לכל ערך של x**

נקודות חיתוך עם הצירים: אין חיתוך עם ציר ה- x . עם ציר ה- y :

$f(0)=\sqrt{13} \Rightarrow$ **$(0;\sqrt{13})$**

נקודות קיצון: $f'(x)=\dfrac{e^{2x}-4e^x}{\sqrt{e^{2x}-8e^x+20}}=0 \Rightarrow x=\ln4 \Rightarrow y=\sqrt{4^2-8\cdot4+20}=2$

תחומי העלייה והירידה זהים לאלה של סעיף 2) , לכן: **(ln4;2) נקודת מינימום**

ג. 1) <u>עבור $c=7$</u> : $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-8e^x}{2\sqrt{e^{2x}-8e^x+7}}=\dfrac{e^{2x}-4e^x}{\sqrt{e^{2x}-8e^x+7}}$. תחום ההגדרה של $f'(x)$

הוא $x<0$ או $x>\ln7$.

הישר $x=\ln7$ הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה $\Leftarrow x\to\ln7 \Rightarrow f'(x)\to\dfrac{21}{0}$

הישר $x=0$ אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה $\Leftarrow x\to0 \Rightarrow f'(x)\to\dfrac{-3}{0}$

הגרף המתאים : **גרף I**

עבור $c = 16$: $g(x) = \dfrac{e^{2x} - 4e^x}{\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 16}}$. תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq \ln4$.

הפונקציה שלילית עבור $x < \ln4$ וחיובית עבור $x > \ln4$.

אפשר לראות שהגרף המתאים הוא **גרף III.**

אפשר להעמיק ולהראות:

$$x \to \ln4 \Rightarrow g(x) \to \frac{0}{0} \Rightarrow g(x) = \frac{e^x(e^x - 4)}{\sqrt{(e^x - 4)^2}} \to \frac{e^x(e^x - 4)}{|e^x - 4|}$$

עבור $x \to (\ln4)^-$ מקבלים $g(x) \to -e^{\ln4} \to -4$

עבור $x \to (\ln4)^+$ מקבלים $g(x) \to e^{\ln4} \to 4$

הגרף המתאים הוא גרף הפונקציה III

עבור $c = 20$: $g(x) = \dfrac{e^{2x} - 4e^x}{\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 20}}$. הפונקציה מוגדרת לכל ערך של x .

הפונקציה שלילית עבור $x = \ln4$ וחיובית עבור $x > \ln4$. מתקיים : $g(\ln4)=0$

הגרף המתאים הוא גרף הפונקציה **II**.

2) גרף I ששייך לפונקציה $y = \dfrac{e^{2x} - 4e^x}{\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 7}}$ ואילו גרף II שייך לפונקציה

$y = \dfrac{e^{2x} - 4e^x}{\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 20}}$. נבדוק את אי-השוויון : $\dfrac{e^{2x} - 4e^x}{\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 7}} > \dfrac{e^{2x} - 4e^x}{\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 20}}$.

מקבלים : $e^x(e^x - 4)\cdot\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 7} > e^x(e^x - 4)\cdot\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 20}$

עבור $x < 0$, $e^x - 4 < 0$ לכן מקבלים $\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 7} < \sqrt{e^{2x} - 8e^x + 20} \Leftarrow$ נכון לכל x .

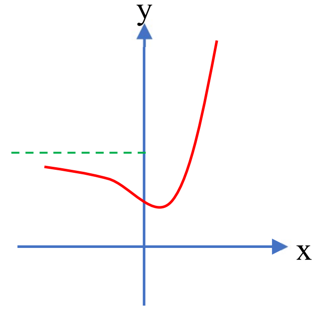
היות ו- $\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 20} > \sqrt{e^{2x} - 8e^x + 7}$ לכל x . לכן:

בתחום $-2 \le x \le -1$ גרף הפונקציה II יהיה מעל גרף הפונקציה I. מקבלים:

(3 $$S = \int_{-2}^{-1}\left(\frac{e^{2x} - 4e^x}{\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 20}} - \frac{e^{2x} - 4e^x}{\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 7}}\right)dx = \left[\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 20} - \sqrt{e^{2x} - 8e^x + 7}\right]_{-2}^{-1} =$$

$$\left[\sqrt{e^{-2} - 8e^{-1} + 20} - \sqrt{e^{-2} - 8e^{-1} + 7}\right] - \left[\sqrt{e^{-4} - 8e^{-2} + 20} - \sqrt{e^{-4} - 8e^{-2} + 7}\right] = \mathbf{0.18}$$

ד.



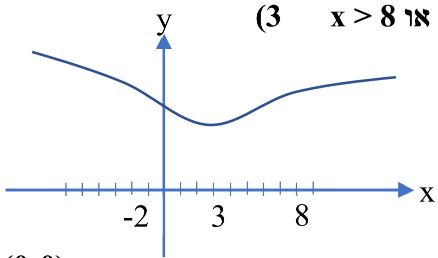
תשובות

1. א. $(x-2)^2+y^2=16$ ג. 1) $E(0;\sqrt{12})$, $Q(4;-\sqrt{12})$
2) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$ 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. א. $\overrightarrow{BC}=-6\underline{v}+2\underline{w}$, $\overrightarrow{AB}=-2\underline{u}+6\underline{v}$
ב. 1) $\underline{u}\cdot\underline{w}=144$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=48$ ג. 1) $t=-12$
2) $\sphericalangle ESM=36.87^\circ$, $\sphericalangle ESC=48.19^\circ$ 3) $M(5;2;1)$
4) $3x+2z-17=0$ 5) לא

3. א. I. $(x-4)^2+y^2=16$, II. $(x-6)^2+y^2=36$
ב. 1) $z_2=4+4\sqrt{2}\cdot i$, $z_1=8-4\sqrt{2}\cdot i$
ג. 1) $z_A=4\sqrt{3}\cdot cis(54.74^\circ)$, $z_B=4\sqrt{2}\cdot cis(45^\circ)$
2) $\sqrt{1.5}\cdot cis(9.74^\circ)$ 3) 9.74°

4. א. גרף I מתאים ל- $f''(x)$, גרף II מתאים ל- $f'(x)$ ב. 1) $b=-3$, $c=17$
2) תחום העלייה: $x>3$, תחום הירידה: $x<3$; תחום הקעירות כלפי מעלה: $-2<x<8$, תחומי הקעירות כלפי מטה: $x<-2$ או $x>8$ 3)



4) 0.893 ג. $k=\ln 2$

5. א. $y=\sqrt{c}$ ב. 1) תחום ההגדרה: $x\le 0$ או $x\ge \ln 7$, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0;0)$, $(\ln 7;0)$, נקודות קיצון: $(0;0)$ מינימום , $(\ln 7;0)$ מינימום
2) תחום ההגדרה: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(\ln 4;0)$, $(0;3)$; נקודת קיצון: $(\ln 4;0)$ נקודת מינימום
3) תחום ההגדרה: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0;\sqrt{13})$, נקודות קיצון: $(\ln 4;2)$ נקודת מינימום ג. 1) גרף I מתאים ל- $c=7$, גרף III מתאים ל- $c=16$, גרף II מתאים ל- $c=20$ 3) 0.18 ד.