מבחן מס' 1

ענה על שלוש מבין השאלות 1-5 (כל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות)

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים , בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק א- סדרות וטריגונומטריה במרחב

סדרות

1. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי כלל הנסיגה : $a_5 = 24$, $a_{n+1} = a_n + Bn + 1$. נתון:
a_3, a_4+1, a_5 מהווים שלושת האיברים הראשונים של סדרה חשבונית $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_n$.

א. (1 הראה כי $B = 2$.
(2 מצא את הפרש הסדרה החשבונית.
(3 מצא נוסחה ל- b_n , האיבר הכללי של הסדרה החשבונית (בטא את b_n באמצעות n).

ב. c_n היא סדרה המוגדרת כך: $c_n = b_n + 2n + 1$.
(1 הראה שהסדרה c_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרש הסדרה.
(2 מצא את c_1 .
(3 בסדרה c_n יש 33 איברים .
מצא את סכום האיברים העומדים במקומות האי- זוגיים בסדרה c_n .

פתרון:

א. 1) נתון : $a_5 = 24$, $a_{n+1} = a_n + Bn + 1$.

נציב $n = 4$ ונקבל :

$$a_{4+1} = a_4 + B\cdot 4 + 1 \Rightarrow a_5 = a_4 + 4B + 1 \Rightarrow 24 = a_4 + 4B + 1 \Rightarrow a_4 = 23 - 4B$$

נציב $n = 3$ ונקבל :

$$a_{3+1} = a_3 + B\cdot 3 + 1 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3B + 1 \Rightarrow 23 - 4B = a_3 + 3B + 1 \Rightarrow a_3 = 22 - 7B$$

a_3, a_4+1, a_5 מהווים סדרה חשבונית לכן מתקיים :

$$a_5 - (a_4+1) = a_4 + 1 - a_3 \Rightarrow a_5 - a_4 - 1 = a_4 + 1 - a_3 \Rightarrow a_5 = 2a_4 - a_3 + 2$$

נציב את התוצאות הקודמות ונקבל:

$$24 = 2(23-4B) - (22-7B) + 2 \Rightarrow 22 = 46 - 8B - 22 + 7B \Rightarrow \mathbf{B = 2}$$

2) נציב : $a_3 = 22 - 7B = 22 - 14 = 8$, $a_4 + 1 = 23 - 4B + 1 = 24 - 8 = 16$

מתקבלת הסדרה : 24 , 16 , 8 . הפרש הסדרה הוא **8**

3) $b_1 = a_3 = 8$, $d = 8 \Rightarrow b_n = 8 + (n-1)8 \Rightarrow \mathbf{b_n = 8n}$

ב. 1) $c_n = b_n + 2n + 1 \Rightarrow c_n = 8n + 2n + 1 \Rightarrow c_n = 10n + 1 \Rightarrow c_{n+1} = 10(n+1) + 1 = 10n + 11$

$$\Rightarrow c_{n+1} - c_n = 10n + 11 - (10n+1) = 10 \Rightarrow$$

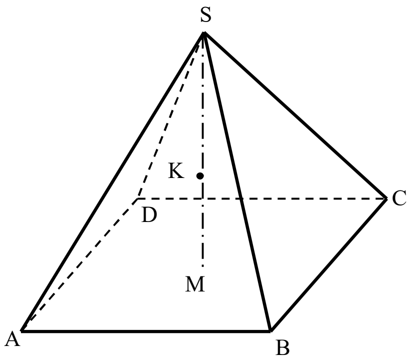
c_n סדרה חשבונית , **d = 10**.

2) $c_n = 10n + 1 \Rightarrow \mathbf{c_1 = 11}$

(3

הסכום	מספר האיברים	ההפרש	האיבר הראשון	הסדרה
	33	10	11	$c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots, c_{33}$
$\frac{17(22+16\cdot 20)}{2} = \mathbf{2907}$	17	20	11	$c_1, c_3, c_5, \ldots\ldots, c_{33}$

<u>טריגונומטריה במרחב</u>



2. נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן.

נתון: $AB = 4a\ ,\ BC = 3a$. SM הוא גובה הפירמידה.

הנקודה K היא אמצע הקטע SM. נפח הפירמידה הוא $18a^3$.

א. 1) הבע באמצעות a את אלכסון בסיס הפירמידה.

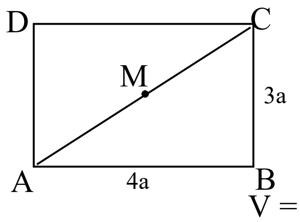
2) הבע באמצעות a את גובה הפירמידה.

ב. 1) חשב את הזווית בין מקצוע צדדי ובין בסיס הפירמידה.

2) נתון: שטח המשולש KAC הוא 50.625 . מצא את a .

ג. חשב את נפח הפירמידה KABCD.

<u>פתרון:</u>

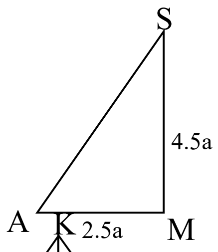


א. 1) אלכסון המלבן ABCD: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4a)^2 + (3a)^2 =$

$= 16a^2 + 9a^2 = 25a^2 \Rightarrow AC = \mathbf{5a}$

2) נתון נפח הפירמידה , לכן:

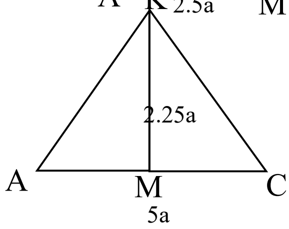
$$V = \frac{S_{ABCD}\cdot SM}{3} \Rightarrow 18a^3 = \frac{4a\cdot 3a\cdot SM}{3} \Rightarrow 18a^3 = 4a^2\cdot SM \Rightarrow SM = \mathbf{4.5a}$$



ב. 1) AM ההיטל של AS על בסיס הפירמידה , לכן הזווית בין המקצוע הצדדי AS ובין בסיס הפירמידה היא $\sphericalangle SAM$.

במשולש ישר הזווית SMA נקבל:

$$\tan\sphericalangle SAM = \frac{4.5a}{2.5a} = 1.8 \Rightarrow \sphericalangle SAM = \mathbf{60.95^o}$$



2) K אמצע SM לכן $KM = \frac{1}{2}SM = 2.25a$.

נתון שטח המשולש KAC לכן:

$$\frac{AC\cdot KM}{2} = \frac{5a\cdot 2.25a}{2} = 5.625a^2 = 50.625 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow \mathbf{a = 3}$$

ג. נוצרת פירמידה שבסיסה המלבן ABCD וגובהה הוא הקטע KM . על פי הסעיפים הקודמים : $BC = 9\ ,\ AB = 12\ ,\ KM = 6.75$.מקבלים:

$$V = \frac{S_{ABCD}\cdot KM}{3} = \frac{12\cdot 9\cdot 6.75}{3} = \mathbf{243}$$

פרק ב- בעיות גדילה ודעיכה, חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות חזקה עם מעריך רציונלי, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

.3 נתונה הפונקציה $f(x)=\cos2x$ בתחום $0\le x\le \pi$.

א. 1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0\le x\le \pi$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=\cos x$.

1) מצא את שיעורי שתי נקודות החיתוך של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בתחום $0\le x\le \pi$.

2) חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות בתחום $0\le x\le \frac{2\pi}{3}$ (נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מעל גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון).

פתרון:

א. 1) חיתוך עם ציר ה- y : $f(0)=\cos0=1\Rightarrow \mathbf{(0;1)}$

חיתוך עם ציר ה- x : $\cos2x=0\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$

הפתרונות בתחום $0\le x\le \pi$: עבור $k=0$ מקבלים : $\mathbf{(\frac{\pi}{4};0)}$, עבור $k=1$ מקבלים $\mathbf{(\frac{3\pi}{4};0)}$. אין פתרונות נוספים בתחום הנתון.

2) $f'(x)=-2\sin2x=0\Rightarrow 2x=\pi k\Rightarrow x=\frac{\pi k}{2}$. הפתרונות בתחום הנתון:

עבור $k=0$ מקבלים $x=0$. $f(0)=\cos0=1$. מתקבלת הנקודה $(0;1)$.

עבור $k=1$ מקבלים $x=\frac{\pi}{2}$. $f(\frac{\pi}{2})=\cos\pi=-1\Leftarrow$ מתקבלת הנקודה $(\frac{\pi}{2};-1)$.

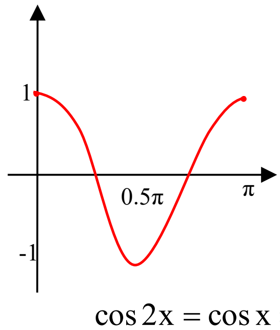
עבור $k=2$ מקבלים $x=\pi$. $f(\pi)=\cos2\pi=1\Leftarrow$ מתקבלת הנקודה $(\pi;1)$.

אין פתרונות נוספים בתחום הנתון.

x	0	$<x<$	0.5π	$<x<$	π
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$	1 max	↘	-1 min	↗	1 max

מקבלים: **$(0;1)$ מקסימום , $(\frac{\pi}{2};-1)$ מינימום , $(\pi;1)$ מקסימום** .

ב.



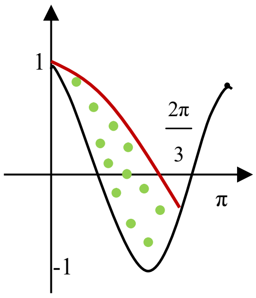
ג. 1) $\cos2x=\cos x\Rightarrow$

$$1)\ \ 2x = x + 2\pi k \Rightarrow x = 2\pi k\ ;\ 2)\ \ 2x = -x + 2\pi k \Rightarrow 3x = 2\pi k \Rightarrow x = \frac{2\pi k}{3}$$

הפתרונות בתחום $0 \le x \le \pi$:

k	0	1	2
x_1	0	לא בתחום	לא בתחום
x_2	0	$\frac{2\pi}{3}$	לא בתחום

מתקבלות הנקודות : $f(0) = g(0) = 1 \Rightarrow \mathbf{(0;1)}\ ;\ f(\frac{2\pi}{3}) = g(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{(\frac{2\pi}{3};-\frac{1}{2})}$



(2 $S = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos x - \cos 2x)dx =$

$$\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - 0 = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

.4 נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - a \cdot e^x + 3$, a פרמטר.

א. נתון : $f(0) + f'(0) = -2$. מצא את a.

הצב $a = 4$ וענה על הסעיפים הבאים:

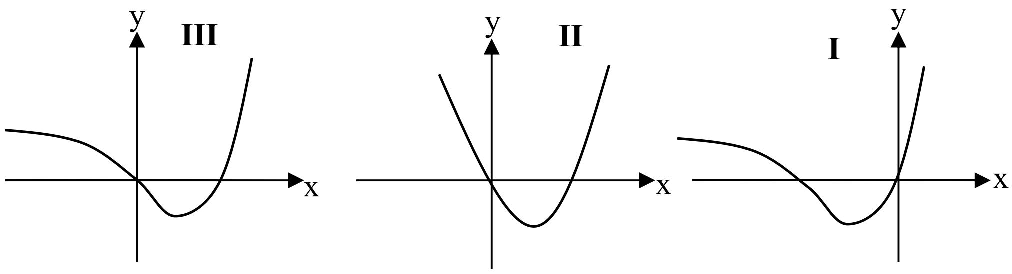
ב. 1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

3) מצא את תחומי העלייה, את תחומי הירידה ואת שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה . קבע את סוג הקיצון.

4) חשב $f(-7)$ ו- $f(-10)$.

ג. איזה מן הגרפים הבאים מתאים להיות הגרף של הפונקציה $f(x)$? נמק.



ד. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ וציר ה- x .

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$. היעזר בסעיפים הקודמים ומצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

<u>פתרון:</u>

א. $f(x) = e^{2x} - a \cdot e^x + 3 \Rightarrow f(0) = e^0 - a \cdot e^0 + 3 = 4 - a$

$$f'(x) = 2e^{2x} - a \cdot e^x \Rightarrow f'(0) = 2 \cdot e^0 - a \cdot e^0 = 2 - a$$

$$f(0) + f'(0) = -2 \Rightarrow 4 - a + 2 - a = -2 \Rightarrow$$

$$6 - 2a = -2 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow \mathbf{a = 4}$$

$f(x)=e^{2x}-4e^{x}+3\ ,\ f'(x)=2e^{2x}-4e^{x}$

ב. 1) תחום ההגדרה : **כל x**

2) $f(0)=4-4=0$ ⇐ **(0;0)** , $f(x)=0 \Leftarrow e^{2x}-4e^{x}+3=0$. נסמן $e^{x}=t$

ונקבל: $t^{2}-4t+3=0 \Rightarrow t=3, t=1 \Rightarrow$

$e^{x}=1\Rightarrow x=0\ ,\ e^{x}=3\Rightarrow x=\ln 3$. מתקבלות הנקודות **(0;0) , (ln3;0)**.

3) $f'(x)=2e^{2x}-4e^{x}=0\Rightarrow 2e^{x}(e^{x}-2)=0\Rightarrow e^{x}\neq 0\Rightarrow$

$e^{x}-2=0\Rightarrow e^{x}=2\Rightarrow x=\ln 2\Rightarrow y=e^{2\ln 2}-4e^{\ln 2}+3=-1\Rightarrow$

מתקבלת הנקודה (ln2;-1).

x	x <	ln2	< x
f '(x)	-	0	+
f(x)	↘	min	↗

מקבלים: תחום עלייה: x > ln2 , תחום ירידה: x < ln2

(ln2;-1) נקודת מינימום

4) $f(-7)=e^{-14}-4e^{-7}+3=2.9964\Rightarrow$ **f(-7) = 2.9964**

$f(-10)=e^{-20}-4e^{-10}+3=2.9998\Rightarrow$ **f(-10) = 2.9998**

ג. גרף III – הפונקציה עוברת דרך ראשית הצירים וחותכת את ציר ה- x בנקודה נוספת הנמצאת מימין לראשית (לכן נפסל גרף I); לפונקציה נקודת מינימום עבור (ln2;-1) .

עבור x = - 7 ו- x = - 10 , ערך הפונקציה מתקרב ל- 3 , לכן גרף III מתאים ולא גרף II

ד. $S=\int_{0}^{\ln 3}\left[0-\left(e^{2x}-4e^{x}+3\right)\right]dx=\int_{0}^{\ln 3}\left[\left(-e^{2x}+4e^{x}-3\right)\right]dx=\left[\frac{-e^{2x}}{2}+4e^{x}-3x\right]_{0}^{\ln 3}$

$=\left(-4.5+12-3\ln 3\right)-\left(-\frac{1}{2}+4\right)=4-3\ln 3=\mathbf{0.704}$

ה. הפונקציה $g(x)=\ln(f(x))$ מוגדרת בתחום בו $f(x)>0$, כלומר, בתחום החיוביות של הפונקציה f(x). על פי סעיפים ב-2) ו- ג', תחום החיוביות של הפונקציה f(x) הוא :

x < 0 או x > ln3

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(2ax - x^2)$, $a > 0$.

א. הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. הישר $y = \ln(\frac{25}{16})$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את a .

הצב $a = 1.25$ וענה על הסעיפים הבאים:

ד. 1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה) .

2) מצא את תחומי העלייה , את תחומי הירידה ואת שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה.

3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום בו מוגדרת הפונקציה $f(x)$. נתון : $g'(x) = f(x)$.

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ו. נתונה הפונקציה $k(x)$ המקיימת: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

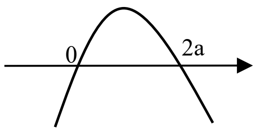
מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה של הפונקציה $k(x)$.

<u>פתרון:</u>

א. תחום ההגדרה: $2ax - x^2 > 0 \Rightarrow x(2a - x) > 0$. פתרונות המשוואה $x(2a - x) = 0$

הם $x = 0$, $x = 2a$. תחום החיוביות של הפרבולה $y = 2ax - x^2$

הוא: $\mathbf{0 < x < 2a}$.



ב. $f(x) = \ln(2ax - x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{2a - 2x}{ax - x^2} = 0 \Rightarrow 2a = 2x \Rightarrow x = a$

x	0	< x <	a	< x <	2a
f '(x)		+	0	-	
f(x)		↗	Max	↘	

$f(a) = \ln\left(2a^2 - a^2\right) = \ln\left(a^2\right) = 2\ln a \Rightarrow$

הנקודה **(a;2lna)** היא נקודת **המקסימום** של הפונקציה

ג. שיפוע הישר $y = \ln(\frac{25}{16})$ הוא 0 , לכן הוא משיק לפונקציה בנקודה בה הנגזרת שווה לאפס,

כלומר בנקודת המקסימום שבה $x = a$. מקבלים: שיעור ה- y של נקודת המקסימום הוא $\ln(\frac{25}{16})$

אם כך: $2\ln a = \ln(\frac{25}{16}) \Rightarrow \ln a^2 = \ln(\frac{25}{16}) \Rightarrow a^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow a = \frac{5}{4} = \mathbf{1.25}$

ד. 1) $f(x) = \ln(2.5x - x^2)$. הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = 0$ לכן אין לה נקודת חיתוך עם

ציר ה- y . חיתוך עם ציר ה- x :

$$0 = \ln(2.5x - x^2) \Rightarrow 2.5x - x^2 = e^0 \Rightarrow x^2 - 2.5x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ , } x = 0.5$$

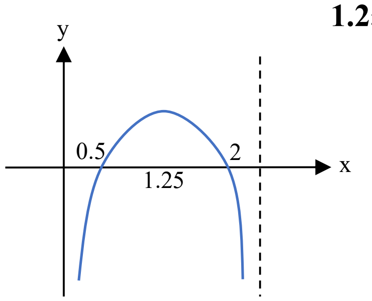
מתקבלות הנקודות **(0.5;0) , (2;0)**

2)

x	0	< x <	1.25	< x <	2.5
f '(x)		+	0	-	
f(x)		↗	Max	↘	

תחום העלייה: $0 < x < 1.25$, תחום הירידה : $1.25 < x < 2.5$

נקודת הקיצון: $(1.25;2\ln1.25)$ מקסימום (3



ה. הפונקציה $f(x)$ היא הנגזרת של הפונקציה $g(x)$,
לכן תחומי העלייה והירידה של $g(x)$ תואמים את
תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$. מקבלים:

x	0	< x <	0.5	< x <	2	< x <	2.5
f '(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		↘		↗		↘	

תחום עלייה: $0.5 < x < 2$, תחומי ירידה : $0 < x < 0.5$ ו – $2 < x < 2.5$

ו. $k(x) = \sqrt{f(x)}$. תחום ההגדרה של הפונקציה $k(x)$ הוא התחום בו $f(x) \geq 0$.

מקבלים : **$0.5 \leq x \leq 2$**

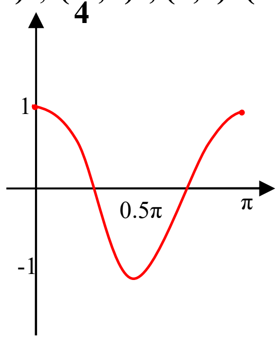
תשובות

1. א. 2) $d = 8$ 3) $b_n = 8n$ ב. 1) $d = 10$ 2) $c_1 = 11$ 3) 2907

2. א. 1) $5a$ 2) $4.5a$ ב. 1) 60.95^o 2) $a = 3$ ג. 243

3. א. 1) $(0;1)$, $(\frac{\pi}{4};0)$, $(\frac{3\pi}{4};0)$ 2) $(0;1)$ מקסימום , $(\frac{\pi}{2};-1)$ מינימום , $(\pi;1)$ מקסימום

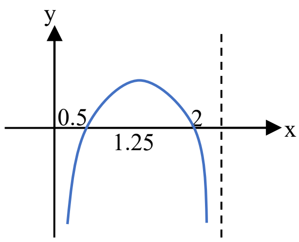
ב.



ג. 1) $(\frac{2\pi}{3};-\frac{1}{2})$, $(0;1)$ 2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

4. א. $a = 4$ ב. 1) כל x 2) $(ln3;0)$, $(0;0)$ 3) תחום עלייה: $x > ln2$,
תחום ירידה: $x < ln2$, $(ln2;-1)$ נקודת מינימום 4) $f(-7) = 2.9964$, $f(-10) = 2.9998$
ג. גרף III ד. 0.704 ה. $x > ln3$ או $x < 0$

5. א. $0 < x < 2a$ ב. $(a;2lna)$ מקסימום ג. $a = 1.25$ ד. 1) $(2;0)$, $(0.5;0)$
2) תחום העלייה: $0 < x < 1.25$, תחום הירידה : $1.25 < x < 2.5$,
$(1.25;2ln1.25)$ מקסימום 3)



ה. תחום עלייה: $0.5 < x < 2$,
תחומי ירידה : $0 < x < 0.5$ ו – $2 < x < 2.5$
ו. $0.5 \le x \le 2$

מבחן מס' 2

ענה על שלוש מבין השאלות 1-5 (כל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות)

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים , בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק א- סדרות וטריגונומטריה במרחב

סדרות

1. בסדרה חשבונית 42 איברים. הפרש הסדרה הוא 4. סכום 24 האיברים הראשונים בסדרה שווה לסכום 18 האיברים האחרונים.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה הסדרה.

ב. בין כל שני איברים בסדרה הנתונה הוסיפו איבר חדש כך שהתקבלה סדרה חשבונית חדשה.

1) מהו הפרש הסדרה החדשה ?

2) האם האיבר ה- 20 בסדרה החדשה שווה לאיבר העשירי בסדרה הנתונה ?

3) מהו מספר האיברים בסדרה החדשה ?

4) האם סכום האיברים במקומות האי-זוגיים בסדרה החדשה שווה לסכום אברי הסדרה המקורית ?

ג. חשב את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה החדשה.

פתרון:

א. הסדרה היא: $a_1, a_2, a_3, ...a_{24}, a_{25}, ...a_{42}$

נתון: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{24} = a_{25} + ... + a_{42}$

או: $S_{24} = S^*_{18}$ כאשר $S^*_{18} = S_{42} - S_{24}$ או $S^*_{18} = a_{25} + ... + a_{42}$

נקבל: $S_{24} = S_{42} - S_{24} \Leftarrow S_{24} = S_{42} \Leftarrow 2S_{24} = S_{42}$ ... $2S_{24} = S_{42} \Rightarrow 2 \cdot \frac{[2a_1 + 23 \cdot 4]24}{2} = \frac{[2a_1 + 41 \cdot 4]42}{2} \Rightarrow$

$$[2a_1 + 23 \cdot 4]24 = [2a_1 + 41 \cdot 4]21 \Rightarrow [2a_1 + 92]8 = [2a_1 + 164]7 \Rightarrow$$

$$16a_1 + 736 = 14a_1 + 1148 \Rightarrow \mathbf{a_1 = 206}.$$

או:

$$S_{24} = S^*_{18} \Rightarrow \frac{[2a_1 + 23d]24}{2} = \frac{[2(a_1 + 24d) + 17d]18}{2} \Rightarrow$$

$$(2a_1 + 23 \cdot 4)12 = (2a_1 + 65 \cdot 4)9 \Rightarrow 6a_1 = 1236 \Rightarrow \mathbf{a_1 = 206}$$

ב. 1) הסדרה המקורית: $206 , 210 , 214 , 218 ....$

אם נכניס איבר נוסף בין שני האיברים הראשונים נקבל: $206 , x , 210$ שמהווים סדרה חשבונית ולכן: $210 - x = x - 206 \Rightarrow 2x = 416 \Rightarrow x = 208 \Rightarrow$

הפרש הסדרה החדשה הוא $208 - 206 = \mathbf{2}$

2) האיבר ה- 20 בסדרה החדשה הוא : $b_{20} = 206 + 19 \cdot 2 = 244$

האיבר העשירי בסדרה המקורית הוא : $a_{10} = 206 + 9 \cdot 4 = 242 \neq 244 \Rightarrow b_{20} \neq a_{10}$

3) בין 42 אברי הסדרה המקורית מכניסים 41 איברים חדשים , לכן , בסדרה החדשה ישנם **83** איברים .

4) בסדרה החדשה: האיבר הראשון הוא 206 , ההפרש הוא 2 ומספר האיברים הוא 83 .
האיברים במקומות האי- זוגיים מהווים סדרה חשבונית שבה :
האיבר הראשון הוא 206 , ההפרש הוא 4 ומספר האיברים הוא 42 . סכום הסדרה הוא:

$$S_{42}=\frac{[2\cdot 206+41\cdot 4]42}{2}=12096$$

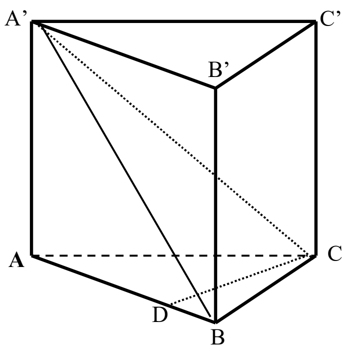
סכום הסדרה המקורית: $S_{42}=\frac{[2\cdot 206+41\cdot 4]42}{2}=12096$

התשובה: **כן**

ג. במקומות הזוגיים בסדרה החדשה מתקבלת סדרה חשבונית שבה :
האיבר הראשון הוא 208 , ההפרש הוא 4 , מספר האיברים הוא 41 . מקבלים :

$$S^*_{41}=\frac{[2\cdot 208+40\cdot 4]41}{2}=\mathbf{11808}$$

טריגונומטריה במרחב



2. נתונה מנסרה משולשת ישרה $ABCC'B'A'$.

בסיס המנסרה הוא משולש שווה-שוקיים $AB = AC$.

נתון: $\sphericalangle BAC = 70^\circ$, $AB = 12$.

נפח המנסרה הוא 1014.87.

א. 1) חשב את גובה המנסרה.

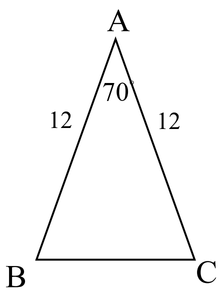
2) חשב את הזווית בין אלכסון הפאה $ABB'A'$ ובין בסיס המנסרה.

ב. 1) חשב את הזווית $\sphericalangle CA'B$.

2) חשב את שטח המשולש $CA'B$.

ג. CD הוא גובה לשוק AB במשולש ABC . חשב את אורך הקטע $C'D$.

פתרון:



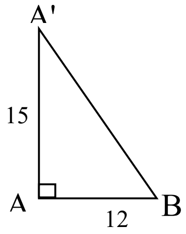
א. 1) שטח בסיס המנסרה הוא שטח המשולש ABC :

$$S=\frac{12^2\cdot\sin 70^\circ}{2}=67.66$$

נפח המנסרה שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה המנסרה. לכן:

$$\Rightarrow 67.66\cdot h=1014.87\Rightarrow h=\mathbf{15}$$

2) $A'B$ הוא אלכסון הפאה $ABB'A'$. AA' מאונך לבסיס ABC , לכן הקטע AB הוא ההיטל של $A'B$ על הבסיס ABC. הזווית בין האלכסון $A'B$ ובין הבסיס ABC היא הזווית $\sphericalangle A'BA$.



במשולש ישר הזווית $A'AB$ מקבלים:

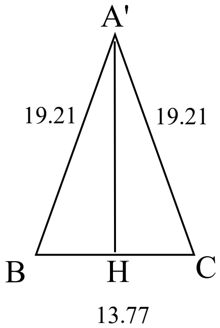
$\tan\sphericalangle A'BA = \frac{15}{12} \Rightarrow \sphericalangle A'BA = \mathbf{51.34^o}$.

ב. 1) $\Delta A'AB \cong \Delta A'AC$ לפי צ.ז.צ. לכן $A'B = A'C$.

במשולש $A'AB$ מקבלים: $A'B^2 = 12^2 + 15^2 \Rightarrow A'B = A'C = 19.21$

במשולש ABC : $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$

מקבלים : $\frac{12}{\sin 55^\circ} = \frac{BC}{\sin 70^\circ} \Rightarrow BC = \frac{12\cdot\sin 70^\circ}{\sin 55^\circ} = 13.77$

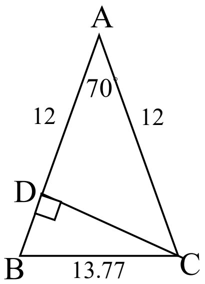


במשולש $A'BC$: נוריד גובה $A'H$ לבסיס BC ונקבל:

במשולש $A'HC$: $\sin\sphericalangle HA'C = \frac{\frac{1}{2}\cdot 13.77}{19.21} = 0.3584 \Rightarrow$

$\sphericalangle HA'C = 21^\circ \Rightarrow \sphericalangle CA'B = 21^\circ\cdot 2 = \mathbf{42^o}$

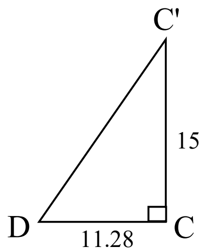
2) $S_{\Delta CA'B} = \frac{19.21^2\cdot\sin 42^\circ}{2} = \mathbf{123.46}$



ג. במשולש BDC : $\sphericalangle ABC = 55^\circ \Rightarrow \sin 55^\circ = \frac{DC}{13.77} \Rightarrow DC = 11.28$

במשולש $C'CD$:

$C'D^2 = 11.28^2 + 15^2 = 352.2384 \Rightarrow C'D = \mathbf{18.77}$



<u>פרק ב</u>- בעיות גדילה ודעיכה, חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות חזקה עם מעריך רציונלי, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

3. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos^2x - a\sin x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$.
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא 2 - .
א. מצא את a .
ב. הצב בפונקציה $a = 2$.
1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
ג. נתון כי לפונקציה $f'(x)$ יש שתי נקודות קיצון <u>פנימיות</u> בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$.
1) חשב $f'(\pi)$.
2) סרטט סקיצה שלגרף הפונקציה $f'(x)$.
3) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f'(x)$, ציר ה- x וציר ה- y , מימין לציר ה- y .
ד. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + c$. גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x בנקודת המינימום המוחלט שלה. מצא את c .

<u>פתרון:</u>
א. $f(x) = \cos^2x - a\sin x \Rightarrow f'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) - a\cos x \Rightarrow$
$f'(x) = -2\cos x \cdot \sin x - a\cos x \Rightarrow f'(0) = -2\cos 0 \cdot \sin 0 - a\cos 0 = -a$
$f'(0) = -2 \Rightarrow -a = -2 \Rightarrow \mathbf{a = 2}$
ב. $f(x) = \cos^2x - 2\sin x$, $f'(x) = -2\cos x \cdot \sin x - 2\cos x$.
(1 $f'(x) = -2\cos x \cdot \sin x - 2\cos x = 0 \Rightarrow -2\cos x(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$(1 \quad -2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$(2 \quad \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

הפתרונות בתחום הנתון:

k	-1	0	1
x_1	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	אין
x_2	אין	$-\frac{\pi}{2}$	אין

מקבלים:

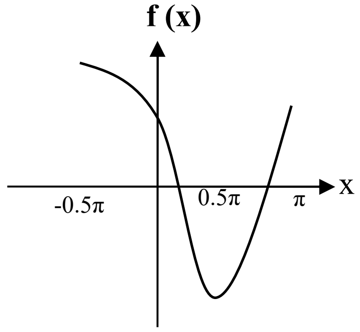
x	-0.5π	$< x <$	0.5π	$< x <$	π
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	max	↘	min	↗	max

$$f(-\frac{\pi}{2}) = 0 + 2 = 2\ ,\ f(\frac{\pi}{2}) = 0 - 2 = -2\ ,\ f(\pi) = 1 - 0 = 1$$

נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון הן :

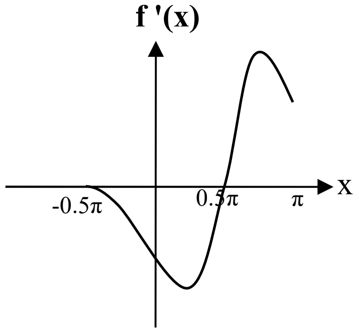
$(-\frac{\pi}{2};2)$ מקסימום , $(\frac{\pi}{2};-2)$ מינימום , $(\pi;1)$ מקסימום

2)



ג. 1) $f'(x) = -2\cos x \cdot \sin x - 2\cos x \Rightarrow f'(\pi) = 0 + 2 = \mathbf{2}$.

2)



3) $S = \int_0^{0.5\pi} -f'(x)dx = \left[-f(x)\right]_0^{0.5\pi} = -f(0.5\pi) + f(0) = 2 + 1 = \mathbf{3}$

ד. $g(x)$ היא הזזה אנכית של הפונקציה $f(x)$, כך שבנקודה $x = 0.5\pi$ בה יש לפונקציה $f(x)$ מינימום מוחלט , גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x . כלומר, הנקודה $(0.5\pi; -2)$ הוזזה 2 יחידות כלפי מעלה לנקודה $(0.5\pi; 0)$. מסקנה : $\mathbf{c = 2}$

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = a\cdot e^{-x} - a\cdot e^{-2x}$, $a > 0$.

א. 1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2) הראה שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום בנקודה שבה $x = \ln 2$

3) הערך המקסימלי של הפונקציה הוא 1. מצא את a .

ב. הצב $a = 4$ ומצא:

1) את נקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים.

2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

3) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הקיצון שלה.

4) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק שמצאת בסעיף הקודם וציר ה- y .

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = -2f(x)$.

1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה.

2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

<u>פתרון:</u>

א. 1) הפונקציה מוגדרת **לכל ערך של x** .

2) $f(x) = a\cdot e^{-x} - a\cdot e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = -a\cdot e^{-x} + 2a\cdot e^{-2x} = 0 \Rightarrow ae^{-x}(-1 + 2e^{-x}) = 0$

$$ae^{-x} > 0 \Rightarrow -1 + 2e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow -x = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow -x = \ln 2^{-1}$$

$$\Rightarrow -x = -\ln 2 \Rightarrow \mathbf{x = \ln 2}$$

x	$x <$	$\ln 2$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	max	↘

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום עבור $x = \ln 2$.

3) $x = \ln 2 \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-2x} = \left(e^{-x}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. ערך הפונקציה בנקודת המקסימום הוא שיעור ה- y של נקודת המקסימום , לכן :

$$f(\ln 2) = a\cdot\frac{1}{2} - a\cdot\frac{1}{4} = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow \mathbf{a = 4}$$

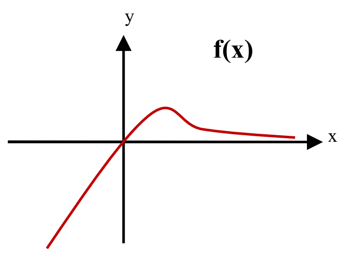
ב. $f(x) = 4e^{-x} - 4e^{-2x}$.

1) חיתוך עם ציר ה- y : $f(0) = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \mathbf{(0;0)}$.

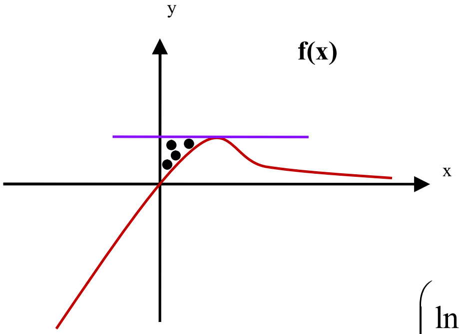
חיתוך עם ציר ה- x : $0 = 4e^{-x} - 4e^{-2x} \Rightarrow e^{-x} - e^{-2x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = e^{-2x} \Rightarrow$.

$$-x = -2x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \mathbf{(0;0)}$$

2)



3) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום $(\ln 2;1)$ הוא 0 ומשוואת המשיק היא $\mathbf{y = 1}$.



4) $S=\int_0^{\ln 2}(1-f(x))dx=\int_0^{\ln 2}(1-4e^{-x}+4e^{-2x})dx=$

$$=\left[x+4e^{-x}+\frac{4e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\ln 2}=$$

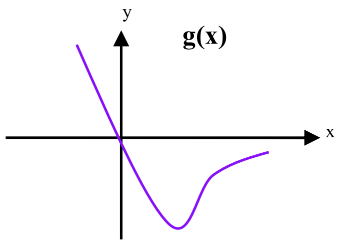
$$\left(\ln 2+4\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{4}\right)-(4-2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\mathbf{0.193}$$

ג. 1) $g(x)=-2f(x)\Leftarrow g(x)$ היא מתיחה ושיקוף ביחס לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

היות והנקודה $(\ln2;1)$ היא נקודת מקסימום של $f(x)$, הרי שהנקודה

$(\ln2;-2)$ היא נקודת מינימום של $g(x)$.

2)



5. נתונה הפונקציה $f(x) = \left(\ln x\right)^2 - a\ln x$.

א. 1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה) .
בטא באמצעות a לפי הצורך.

ב. נקודת קיצון של הפונקציה נמצאת על הישר $x = e$.

1) מצא את a .

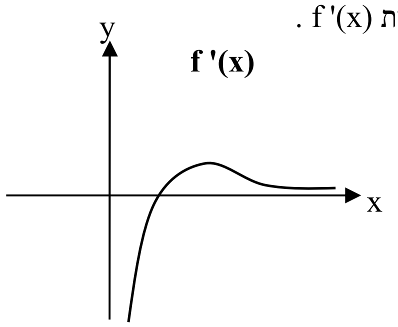
2) מצא את שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה .

ג. הצב $a = 2$ וענה על הסעיפים הבאים:

1) מצא את תחומי העלייה והירידה וקבע את סוג נקודת הקיצון של הפונקציה.

2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה. סמן בגרף את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

3) בציור שלפניך מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף
פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ציר ה- x
והישר $x = e^2$.



<u>פתרון:</u>

א. 1) תחום ההגדרה: $\mathbf{x > 0}$.

2) על פי תחום ההגדרה – אין לפונקציה נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

חיתוך עם ציר ה- x : $f(x) = 0 \Rightarrow \left(\ln x\right)^2 - a\ln x = 0 \Rightarrow \left(\ln x\right)\left(\ln x - a\right) = 0 \Rightarrow$

$\ln x - a = 0 \Rightarrow \ln x = a \Rightarrow x = e^a \Rightarrow \mathbf{(e^a;0)} \quad , \ \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1 \Rightarrow \mathbf{(1;0)}$

ב. 1) $f(x) = \left(\ln x\right)^2 - a\ln x \Rightarrow f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} - a \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x} - \frac{a}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2\ln x - a}{x}$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\ln x - a}{x} = 0 \Rightarrow 2\ln x - a = 0 \Rightarrow 2\ln x = a \Rightarrow \ln x = \frac{a}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{a}{2}}$$

נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על הישר $x = e \Leftarrow e^{\frac{a}{2}} = e \Leftarrow \frac{a}{2} = 1 \Leftarrow \mathbf{a = 2}$

2) $f(x) = \left(\ln x\right)^2 - 2\ln x \Rightarrow f(e) = \left(\ln e\right)^2 - 2\ln e = \mathbf{-1}$

ג. $f(x) = \left(\ln x\right)^2 - 2\ln x \ , \ f'(x) = \frac{2\ln x - 2}{x}$

(1

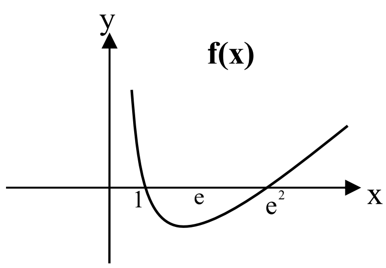
x	0	$< x <$	e	$< x$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	min	↗

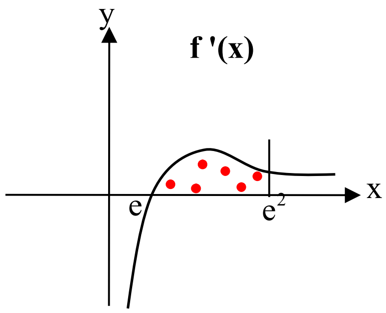
תחום העלייה: $x > e$, תחום הירידה : $0 < x < e$

הנקודה $(e;-1)$ היא נקודת מינימום

2) $\left(\ln x\right)^2 - 2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x(\ln x - 2) = 0 \Rightarrow$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \ , \ \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$





$$S = \int_e^{e^2} f'(x)dx = \left[f(x)\right]_e^{e^2} =$$ (3

$f(e^2) - f(e) = 0 - (-1) = \mathbf{1}$

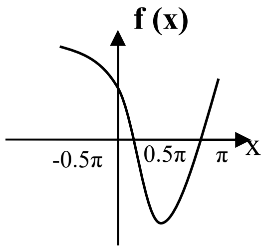
<u>תשובות</u>

1. א. 206 ב. 1) 2 2) לא 3) 83 4) כן ג. 11808

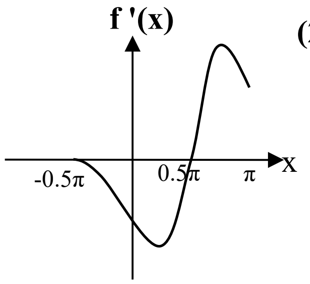
2. א. 1) 15 2) 51.34^o ב. 1) 42^o 2) 123.46 ג. 18.77

3. א. $a = 2$ ב. 1) $(-\frac{\pi}{2};2)$ מקסימום , $(\frac{\pi}{2};-2)$ מינימום , $(\pi;1)$ מקסימום

2)

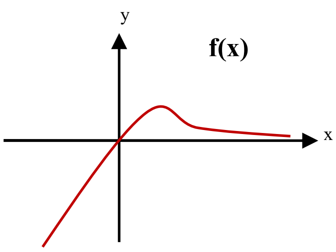


ג. 1) $f'(\pi) = 2$ 2)



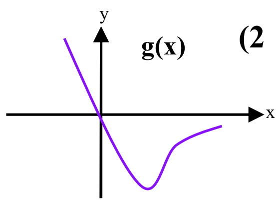
3) 3 ד. $c = 2$

4. א. 1) כל x 3) $a = 4$ ב. 1) $(0;0)$ 2)

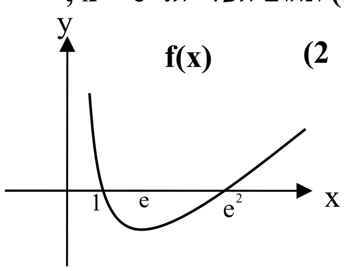


3) $y = 1$ 4) 0.193

ג. 1) $(\ln2;-2)$ מינימום 2)



5. א. 1) $x > 0$ 2) $(1;0)$, $(e^a;0)$ ב. 1) $a = 2$ 2) 1 - ג. 1) תחום העלייה: $x > e$,
תחום הירידה : $0 < x < e$, הנקודה $(e;-1)$ היא נקודת מינימום 2)



3) 1