

מבחן מס' 1

משך הבחינה: שעתיים ורבע

פרק ראשון: גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. הישר $x = t$ חותך את הפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודות A ו-B (הנקודה A נמצאת ברביע הראשון). אורך המיתר AB הוא 24. הנקודה P נמצאת על הפרבולה, משמאל לנקודה A, כך שהשטח המקסימלי של המשולש ABP הוא 72.
- א. מצא את t ואת משוואת הפרבולה.
 2. האם המיתר AB עובר דרך מוקד הפרבולה F? נמק.
- ב. הנקודה C נמצאת על המיתר AB כך שמתקיים: $AC:CB = 1:7$.
 ישר המקביל לציר ה-x ועובר בנקודה C חותך את הפרבולה בנקודה D ואת מדריך הפרבולה בנקודה E.
 1. מצא את שיעורי הנקודה D.
 2. חשב את היקף המשולש EDF.
- ג. הנקודה D היא מרכזו של מעגל המשיק לציר ה-y ומשיק מבחוץ למעגל $x^2 + y^2 = 12x$ בנקודה K. מצא את שיעורי הנקודה K.

2. נתונים הישרים: $l_1: \underline{x} = (1;0;0) + t(2;2;-3)$ ו- $l_2: \underline{x} = (2;0;0) + m(1;1;-2)$.
- א. הראה שהישרים l_1 ו- l_2 מצטלבים.
 ב. 1) מצא הצגה פרמטרית של מישור π_1 המכיל את הישר l_1 ומקביל לישר l_2 .
 2) מצא את משוואת המישור π_1 .
 ג. מצא הצגה פרמטרית של ישר l_3 המוכלל במישור π_1 , מקביל לישר l_2 ועובר בנקודה $(k;0;2)$.
- ד. 1) מישור π_2 נקבע על-ידי הישרים l_2 ו- l_3 . מצא הצגה פרמטרית של ישר l_4 העובר בנקודה $(2;0;0)$ ומאונך למישור π_2 .
 2) הישר l_4 חותך את המישור π_1 בנקודה P. הנקודה $A(3;2;-3)$ נמצאת על הישר l_1 , הנקודה $B(1;0;2)$ נמצאת על הישר l_3 והנקודה C נמצאת על הישר l_2 . מצא את נפח הפירמידה CABP.

$$3. \text{ א. (1) פתור את המשוואה: } z^4 = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{3} - i)^3}$$

(2) הראה שפתרונות המשוואה נמצאים על מעגל שמרכזו בראשית הצירים במישור של גאוס ומצא את משוואת המעגל.

ב. z_k הוא אחד הפתרונות של המשוואה, $0 \leq k \leq 3$.

(1) הראה כי $[(\sqrt{3} + i) \cdot z_k]^4$ הוא מספר מדומה טהור.

(2) האם iz_k הוא פתרון של המשוואה? נמק.

פרק שני- גדילה ודעיכה, פונקציית חזקה, פונקציה מעריכית ולוגריתמית

$$4. \text{ א. נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - x}{x^2}$$

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא לגרף הפונקציה $f(x)$ אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. בציור שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

גרף הפונקציה $f'(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 3.17$.

(1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x) = f(x)$. נתון: $g(1) = 0$.

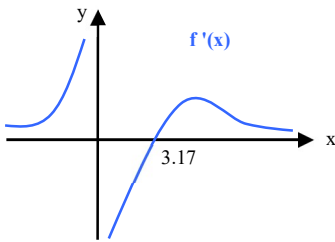
(1) נתון: $f(1.77) = 0$. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את הפונקציה $g(x)$.

(3) הישר $x = 0$ הנו האסימפטוטה היחידה לגרף הפונקציה $g(x)$.

חשב $g(10)$ ו- $g(-10)$ וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(4) חשב את השטח המוגבל בין גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ והישרים $x = 4$ ו- $x = 6$.



5. א. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה בתחום $x > 3$. נתון: $f'(x) = \frac{1}{x-3}$, $f(4) = \ln 3$.

הראה כי: $f(x) = \ln(3x - 9)$.

ב. (1) הראה שהפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

(2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(4) מגדירים פונקציה $S(x)$ המקיימת: $S(x) = \int_{3.1}^x f(t) dt$ בתחום $3.1 \leq x \leq 4$.

מצא את הערך של x עבורו $S(x)$ מינימלי ואת הערך של x עבורו $S(x)$ מקסימלי. נמק.

ג. בטא את x באמצעות $f(x)$ והראה כי $x = \frac{1}{3} e^{f(x)} + 3$.

ד. נתונה פונקציה נוספת: $g(x) = \frac{1}{3} e^x + 3$.

(1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא לפונקציה $g(x)$ אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x .

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(4) חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $g(x)$, ציר y והישר $y = 6$.

(5) האם תוכל לומר, על סמך הסעיפים הקודמים, מהו השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $f(x)$, ציר x והישר $x = 6$? נמק.

בהצלחה!

תשובות

1. א. (1) $y^2 = 24x$, $t = 6$ כן ב. (1) $D(3.375; 9)$ ג. $K(4.32; 5.76)$

2. ב. (1) $\pi_1 : \underline{x} = (1; 0; 0) + p(2; 2; -3) + q(1; 1; -2)$ ג. $l_3 : \underline{x} = (1; 0; 2) + r(1; 1; -2)$ ד. $l_4 : \underline{x} = (2; 0; 0) + s(2; 0; 1)$ (1) 0.833 (2)

3. א. (1) $z_3 = \sqrt{2} \text{cis}(262.5^\circ)$, $z_2 = \sqrt{2} \text{cis}(172.5^\circ)$, $z_1 = \sqrt{2} \text{cis}(82.5^\circ)$ ב. (2) $x^2 + y^2 = 2$ ג. (2) $z_4 = \sqrt{2} \text{cis}(352.5^\circ)$

4. א. (1) $x \neq 0$, $y = 0$ ב. (1) $(3.17; -0.18)$ מינימום

(2) תחומי העלייה: $x < 0$, $x > 3.17$

תחום הירידה: $0 < x < 3.17$

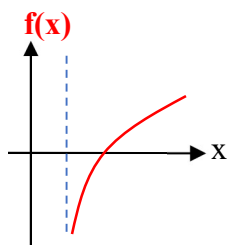
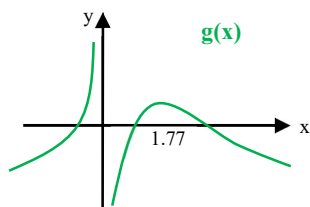
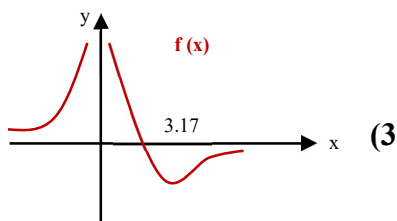
ג. (1) תחומי העלייה: $x < 0$, $0 < x < 1.77$

תחום ירידה: $x > 1.77$

(2) $g(x) = -e^{\frac{1}{x}} - \ln|x| + e$

(3) $g(10) = -0.69$, $g(-10) = -0.49$

0.339 (4)



(3)

5. ב. (2) $(3\frac{1}{3}; 0)$

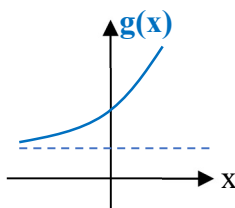
(4) הערך המינימלי יתקבל עבור $x = 3\frac{1}{3}$ והערך

המקסימלי יתקבל עבור $x = 4$.

ד. (1) $(0; 3\frac{1}{3})$ (2) $y = 3$ (3)

3.925 (4)

3.925 (5)

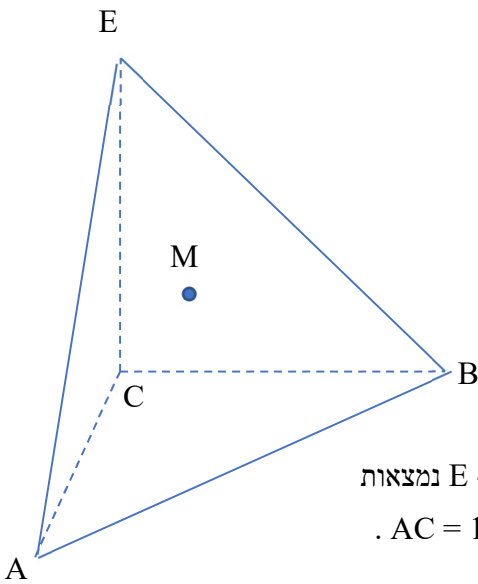


מבחן מס' 2

משך הבחינה: שעתיים ורבע

פרק ראשון: גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. א. מצא את משוואות שני הישרים העוברים דרך הנקודה $(-2; -2)$ ונמצאים במרחק 3 מן הנקודה $(-5; 2)$.
- ב. את אחד הישרים שמצאת בסעיף א' המקביל לציר ה- y נסמן ב- l_1 . מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מן הישר l_1 שווה למרחקן מן הנקודה $N(2; 0)$.
- ג. נסמן ב- l_2 את הישר השני שקיבלת בסעיף א'. מצא משוואת מעגל שמרכזו על חלקו החיובי של ציר ה- x ומשיק גם לישר l_1 וגם לישר l_2 .
- ד. (1) הסבר מדוע המעגל שמצאת בסעיף ג' חותך את המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף ב' בשתי נקודות (ניתן להיעזר בציור מתאים).
- (2) נסמן ב- M את מרכזו של המעגל שמצאת בסעיף ג'. A היא אחת מנקודות החיתוך של המעגל M עם המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף ב'. מרחק הנקודה A מן הישר l_1 הוא d . הבע בעזרת d את היקף המשולש AMN .



2. $ABCE$ פירמידה משולשת. נתון: $CA = CB = CE$,

$EC \perp CB$, $EC \perp CA$, $CA \perp CB$ הנקודה M

היא נקודת מפגש התיכונים במשולש ABE .

א. (1) הסבר מדוע הפירמידה $ABCE$ היא פירמידה ישרה.

(2) הראה ש- CM מאונך למישור הפאה ABE .

(3) מהי הזווית בין הקטע CM לקטע EB ? נמק.

ב. הנקודה N היא נקודת מפגש התיכונים בפאה ACE .

הוכח: $MN \parallel BC$.

ג. נתון: הנקודה C נמצאת בראשית הצירים. הנקודות A , B ו- E נמצאות

על החלקים החיוביים של ציר x , ציר y וציר z בהתאמה. $AC = 12$.

(1) מצא את משוואת המישור EMC .

(2) BN חותך את מישור המשולש EMC בנקודה P . חשב את היחס $\frac{BP}{PN}$.

3. א. פתור את המשוואה: $2i\bar{z} + 3z + 18 = |z|^2$.

ב. הנקודה A נמצאת ברביע השני במישור של גאוס ומייצגת את אחד הפתרונות של המשוואה. הנקודה A מייצגת את הקודקוד A של מצולע משוכלל בעל n צלעות, $n > 4$. הנקודות B, C, D, E, ... מייצגות את שאר הקודקודים על פי סדר האותיות, נגד כיוון השעון. המספר $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 5i)$ מייצג את הקודקוד D של המצולע.

(1) מצא את n.

(2) מצא את שטח המצולע.

ג. קודקודי המצולע מתאימים לפתרונות המשוואה $z^n = a + bi$.

(1) מצא את המספר $a + bi$.

(2) המספר המרוכב z_k , $1 \leq k \leq n$, הנו אחד מפתרונות המשוואה.

הראה שהנקודות המתאימות למספרים z_k ו- z_{k+4} נמצאות על ישר אחד העובר דרך ראשית הצירים.

(3) נסמן $z_k = r\text{cis}\theta$. הראה כי $z_{k+4} = -r\text{cis}\theta$.

פרק שני- גדילה ודעיכה, פונקציית חזקה, פונקציה מעריכית ולוגריתמית

4. בשני כפרים הרריים התגלתה מגפה הפוגעת בעדרי הכבשים אך לא גורמת למותם. ביום מסוים, היה מספר הכבשים החולים בעדר של כפר ב' גדול פי 9 ממספרם בכפר א'. התברר שבכפר א' גדל מספר הכבשים החולים פי a מדי שבוע ובכפר ב' מספרם גדל פי b מדי שבוע. כעבור 4 שבועות אחרי הספירה הראשונה היה מספר הכבשים החולים בכפר ב' גדול פי $1\frac{7}{9}$ ממספרם בכפר א'.

א. הראה כי $b = \frac{2}{3}a$.

ב. כעבור כמה שבועות מן הספירה הראשונה היה אותו מספר כבשים חולים בשני הכפרים?

ג. הסתבר שמספר הכבשים החולים בכפר א' גדל פי 2 תוך 1.2 שבועות.

פי כמה גדל מספר הכבשים החולים מדי שבוע בכפר א'? (עגל תוצאה לספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית).

ד. ביום בו החל המעקב אחר התפשטות המגפה היו k כבשים חולים בכפר א'.

הפונקציה $f(x)$ מתארת את מספר הכבשים החולים בכפר א' והפונקציה $g(x)$ מתארת את מספר הכבשים החולים בכפר ב' לפי הזמן x שנמדד מרגע המדידה הראשונה.

(1) רשום באמצעות k את הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(2) עדר הכבשים בכפר א' מונה 1785 כבשים ועדר הכבשים בכפר ב' מונה 690 כבשים. התברר שכעבור 10 שבועות, כל הכבשים בכפר א' היו חולים. תוך כמה זמן יחלו כל הכבשים בעדר של כפר ב'?

(3) סרטט, באותה מערכת צירים את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 15$

5. הפונקציה $f(x)$ משיקה לציר ה- x . נתונה הנגזרת של הפונקציה: $f'(x) = \frac{2x - 10}{x^2 - 10x + 26}$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה ומצא:

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתון: $g(x) = f(x+5)$.

(1) הראה שהפונקציה $g(x)$ זוגית.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ סימטרית ביחס לישר $x = 5$? נמק.

(3) השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישר $x = 10$ הוא S .

הבע בעזרת S את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x , הישר $x = 5$

והישר $x = -5$.

ה. (1) נתונה פונקציה נוספת: $h(x) = \ln(5.2x^2 + 5.2)$. הפונקציה $h(x)$ מקיימת:

$h(x) = g(x) + c$. מצא את c .

(2) נגדיר פונקציה נוספת: $k(x) = e^{h(x) - g(x)}$. חשב את השטח המוגבל בין גרף

הפונקציה $k(x)$, ציר x , הישר $x = 6$ והישר $x = 10$.

בהצלחה!

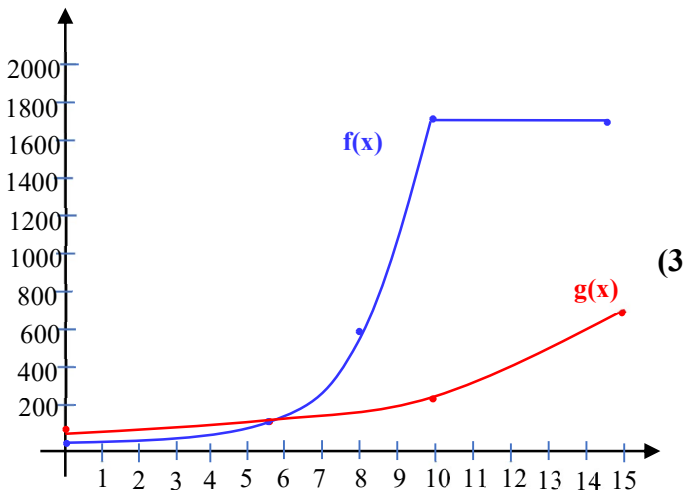
תשובות

$$1. \quad x = -2, 24y + 7x + 62 = 0 \quad \text{א.} \quad y^2 = 8x \quad \text{ב.} \quad \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{64}{9} \quad \text{ג.}$$

$$d + 4 \quad (2. \text{ד.})$$

$$2. \quad \frac{BP}{PN} = 3 \quad (2 \quad x - y = 0 \quad (1. \text{ג.} \quad 90^\circ \quad (3 \quad \text{א.} \quad 2))$$

$$3. \quad \text{א.} \quad -3 + 2i, \quad \frac{54}{13} - \frac{36}{13}i \quad \text{ב.} \quad n = 8 \quad (1. \quad 26\sqrt{2} \quad (2 \quad \text{ג.} \quad -239.269 + 28559.998 \cdot i \quad (1.))$$



4. ב. 5.4 שבועות ג. פי 1.8

$$f(x) = k \cdot (1.8)^x, \quad g(x) = 9k \cdot (1.2)^x \quad (1. \text{ד.})$$

(2) כ- 15 שבועות

$$5. \quad \text{א.} \quad f(x) = \ln(x^2 - 10x + 26) \quad \text{ב.} \quad (1. \quad \text{כל } x \quad (2 \quad (0; \ln 26), (5; 0), (5; 0) \quad (3 \quad (5; 0) \quad \text{נקודת מינימום})$$

$$20.8 \quad (2 \quad \ln(5.2) \quad (1. \text{ה.} \quad 2S \quad (3 \quad \text{כך} \quad (2. \text{ד.}))$$

