מבחן מס' 1

פרק א- סדרות וטריגונומטריה במרחב

סדרות

1. סדרה מוגדרת על-ידי הכלל: $a_{n+1}=a_n+14$, $a_1=4$ לכל n טבעי.

א. הראה שהסדרה היא סדרה חשבונית ומצא את הפרש הסדרה.

ב. בסדרה זו n איברים. סכום כל אברי הסדרה הוא 8470. מצא את n .

ג. מהסדרה הנתונה לקחו כל איבר הנמצא במקום אי-זוגי והתקבלה סדרה חשבונית חדשה: $a_1,a_3,a_5,....,a_n$.

1) מצא את מספר האיברים בסדרה החדשה.

2) חשב את סכום הסדרה החדשה.

ד. חלק מאברי הסדרה המקורית מתחלקים ב- 3.
כמה איברים בסדרה המקורית מתחלקים ב- 3 ?

פתרון:

א. $a_{n+1}=a_n+14 \Leftarrow a_{n+1}-a_n=14$ לכל n טבעי , לכן , הסדרה החשבונית שבה **d = 14** הוא ההפרש הקבוע של הסדרה.

ב. נתון: $S_n=8470 \Rightarrow \frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}=8470 \Rightarrow \frac{n[2\cdot 4+(n-1)\cdot 14]}{2}=8470$

$$\Rightarrow n(8+14n-14)=16940 \Rightarrow 14n^2-6n-16940=0 \Rightarrow \mathbf{n=35}$$

הנו הפתרון הטבעי של המשוואה.

ג. 1) מספר האיברים במקומות האי-זוגיים בסדרה שבה 35 איברים הנו $\frac{35+1}{2}=\mathbf{18}$

2) האיבר הראשון בסדרה $a_1,a_3,a_5,....,a_{35}$ הוא 4 , הפרש הסדרה הוא $2d=28$, מספר אברי הסדרה הוא 18 , לכן מקבלים:

$$S_{18}=\frac{18[2\cdot 4+(18-1)28]}{2}=9(8+17\cdot 28)=\mathbf{4356}$$

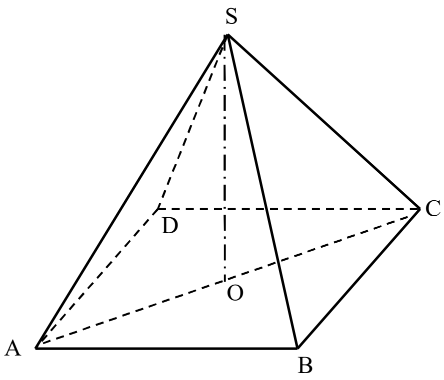
ד. פירוט אברי הסדרה: האיבר הראשון הוא 4 , ההפרש הוא 14 והאיבר האחרון הוא $a_{35}=4+34\cdot 14=480$: 4 , 18 , 32 ,......., 452 , 466 , 480.

האיבר הראשון שמתחלק ב- 3 הוא 18 והאחרון הוא 480 .

ההפרש של הסדרה הזאת יהיה $14\cdot 3=42$.

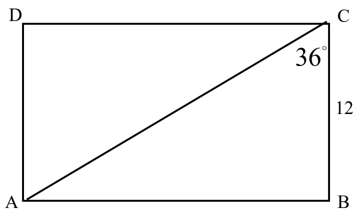
מקבלים: $480=18+(n-1)\cdot 42 \Rightarrow 462=(n-1)\cdot 42 \Rightarrow n-1=11 \Rightarrow n=\mathbf{12}$

טריגונומטריה במרחב



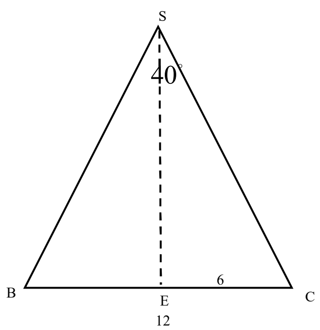
2. נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן ABCD (ראה ציור).
נתון: BC = 12 ס"מ , $\sphericalangle ACB = 36^\circ$, $\sphericalangle BSC = 40^\circ$.
א. 1) מצא את גודל הזווית בין מקצוע צדדי לבין בסיס הפירמידה.
2) חשב את הזווית $\sphericalangle ASC$.
3) חשב את הזווית $\sphericalangle ASB$.
ב. 1) חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.
2) חשב את נפח הפירמידה.

פתרון:



א. 1) SO גובה הפירמידה . O נקודת מפגש אלכסוני המלבן ABCD.
OC ההיטל של המקצוע הצדדי SC על בסיס הפירמידה, לכן, הזווית המבוקשת היא הזווית $\sphericalangle SCO$.
במשולש ABC אפשר לחשב את אורך אלכסון המלבן ABCD :

$$\cos 36^\circ = \frac{12}{AC} \Rightarrow AC = \frac{12}{\cos 36^\circ} = 14.83 \Rightarrow OC = 7.416$$



משולש SBC שווה-שוקיים , SE גובה לבסיס. במשולש SCE מקבלים:

$$\sin 20^\circ = \frac{6}{SC} \Rightarrow SC = \frac{6}{\sin 20^\circ} = 17.54$$

במשולש SOC : $\sphericalangle SOC = 90^\circ \Leftarrow$

$$\cos \sphericalangle SCO = \frac{7.416}{17.54} = 0.423 \Rightarrow \sphericalangle SCO = \mathbf{64.99^o}$$

2) משולש ASC שווה-שוקיים , SO גובה לבסיס AC ולכן גם חוצה את זווית הראש $\sphericalangle ASC$.

$$\sphericalangle OSC = 90^\circ - 64.99^\circ = 25.01^\circ \Rightarrow \sphericalangle ASC = \mathbf{50.02^o}$$

3) במשולש ABC : $\tan 36^\circ = \frac{AB}{12} \Rightarrow AB = 8.72$

משולש SAB שווה-שוקיים . נעביר SP גובה לבסיס AB. $\Leftarrow$ SP תיכון לבסיס AB
$\Leftarrow AP = 4.36$. $SA = SC = 17.54$

במשולש SAP : $\sin(\frac{1}{2}\sphericalangle ASB) = \frac{4.36}{17.54} \Rightarrow \sphericalangle ASB = \mathbf{28.78^o}$

ב. 1)

$$S = 2S_{\Delta SBC} + 2S_{\Delta SAB} = 2\left(\frac{17.54 \cdot 17.54 \cdot \sin 40^\circ}{2} + \frac{17.54 \cdot 17.54 \cdot \sin 28.78^\circ}{2}\right) = \mathbf{345.9}$$

2) במשולש SOC : $\sphericalangle SOC = 90^\circ \Leftarrow$ $\sin 64.99^\circ = \frac{SO}{17.54} \Rightarrow SO = 15.89$

שטח הבסיס של הפירמידה :

$$S_{ABCD} = 12 \cdot 8.72 = 104.64 \Rightarrow V = \frac{104.64 \cdot 15.89}{3} = \mathbf{554.2}$$

<u>פרק ב</u>- בעיות גדילה ודעיכה, חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות חזקה עם מעריך רציונלי, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

3. נתונה הפונקציה $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

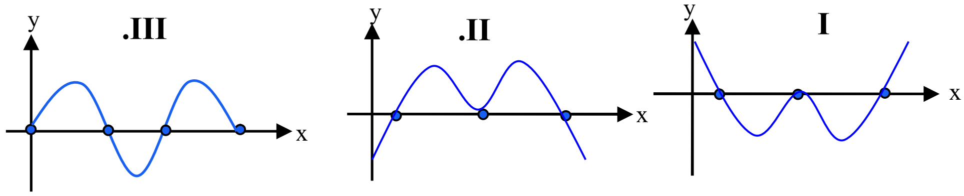
א. 1) מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים .

2) מצא את כל הנקודות בתחום עבורן $f'(x)=0$.

3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון ומצא את סוגן.

4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. איזה מן הגרפים הבאים מתאים להיות הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמק.



ג. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+k$, $k\neq 0$. מצא את ערכי k עבורם גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x .

<u>פתרון:</u>

א. 1) חיתוך עם ציר ה- y : $f(0)=0\Rightarrow \mathbf{(0;0)}$

חיתוך עם ציר ה- x : $2\sin x+\sin 2x=0\Rightarrow 2\sin x+2\sin x\cos x=0\Rightarrow$

$2\sin x(1+\cos x)=0\Rightarrow \text{I. } \sin x=0\Rightarrow x=\pi k$

$\text{II. } 1+\cos x=0\Rightarrow \cos x=-1\Rightarrow x=\pi+2\pi k$

הפתרונות בתחום $0\le x\le 2\pi$: $\mathbf{(0;0)}$, $\mathbf{(\pi;0)}$, $\mathbf{(2\pi;0)}$

(2 $f(x)=2\sin x+\sin 2x\Rightarrow f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=0\Rightarrow$

$\cos x+\cos 2x=0\Rightarrow \cos x+2\cos^2 x-1=0\Rightarrow 2t^2+t-1=0$

$t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=-1\Rightarrow \text{I. } \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $\text{II. } \cos x=-1\Rightarrow x=\pi+2\pi k$

הפתרונות בתחום $0\le x\le 2\pi$: $x=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}$.

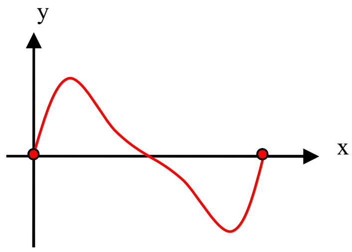
$f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\pi)=0$, $f(\frac{5\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

מתקבלות הנקודות: $\mathbf{(\frac{\pi}{3};\frac{3\sqrt{3}}{2})}$, $\mathbf{(\pi;0)}$, $\mathbf{(\frac{5\pi}{3};-\frac{3\sqrt{3}}{2})}$

(3

x	0	< x <	$\frac{\pi}{3}$	< x <	π	< x <	$\frac{5\pi}{3}$	< x <	2π
f '(x)		+	0	-	0	-	0	+	
f(x)	min	↗	max	↘	פיתול	↘	min	↗	max

מתקבלות הנקודות:



$(0;0)$ מינימום , $(\frac{\pi}{3};\frac{3\sqrt{3}}{2})$ מקסימום ,

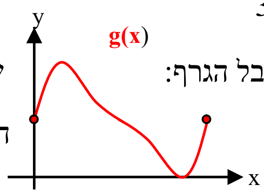
(4 $(\frac{5\pi}{3};-\frac{3\sqrt{3}}{2})$ מינימום , $(2\pi;0)$ מקסימום

ב. **גרף I.** – גרף III. נפסל , כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש רק שלוש נקודות אפס. גרף II. נפסל כי תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה המתוארת בגרף אינם תואמים את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f'(x)$, כפי שהם נקבעו בטבלה בסעיף א-3).

ג. הפונקציה $g(x)$ היא הזזה אנכית של הפונקציה $f(x)$.

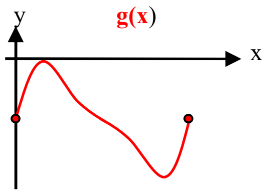
בנקודות $x=\frac{5\pi}{3}$ ו- $x=\frac{\pi}{3}$ ערך הפונקציה שונה מ- 0 , לכן ,

עבור $\mathbf{k=\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ מתקבל הגרף:



שהנו הזזה של הפונקציה $f(x)$ ב- $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ יחידות כלפי מעלה . גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x בנקודה שבה $x=\frac{5\pi}{3}$.

עבור $\mathbf{k=-\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ מתקבל הגרף:



שהנו הזזה של גרף $f(x)$ ב- $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ יחידות כלפי מטה . גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{3}$.

4. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל ערך של x . הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2e^{2x}-e^{x}$.

א. 1) מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
2) ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא -2.25 . מצא את $f(x)$.
3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים .
4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת : $g(x) = -f(x)$.
1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.
2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
3) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה- y .

<u>פתרון:</u>

א. 1) $f'(x)=2e^{2x}-e^{x}=0$. נסמן $e^{x}=t$ ונקבל :

$2t^2-t=0 \Rightarrow t(2t-1)=0 \Rightarrow t=0, t=0.5 \Rightarrow$ I. $e^{x}=0 \Rightarrow$ אין פתרון

II. $e^{x}=0.5 \Rightarrow x=\ln(0.5)=-0.69$

x	$x<$	$\ln(0.5)$	$<x$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

מקבלים : $\mathbf{x=\ln 0.5}$ **נקודת מינימום**

2) ידוע: $(\ln 0.5;-2.25)$ נקודת מינימום.

$$f(x)=\int\left(2e^{2x}-e^{x}\right)dx=\frac{2e^{2x}}{2}-e^{x}+c \Rightarrow f(x)=e^{2x}-e^{x}+c .$$

נציב את שיעורי נקודת הקיצון ונקבל:

$$-2.25=e^{2\ln 0.5}-e^{\ln 0.5}+c \Rightarrow -2.25=e^{\ln 0.5^2}-e^{\ln 0.5}+c \Rightarrow$$

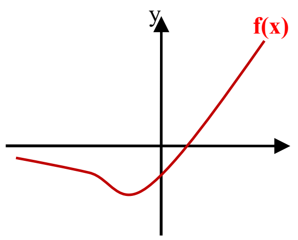
$$-2.25=0.25-0.5+c \Rightarrow c=-2 \Rightarrow \mathbf{f(x)=e^{2x}-e^{x}-2}$$

3) חיתוך עם ציר ה- y : $f(0)=1-1-2=-2 \Rightarrow$ **(0;-2)** . חיתוך עם ציר ה- x :

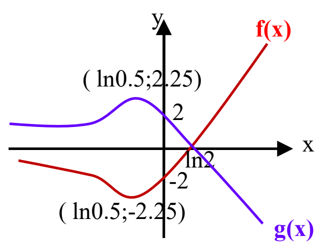
$$0=e^{2x}-e^{x}-2 \Rightarrow t^2-t-2=0 \Rightarrow t=2\ ,\ t=-1 \Rightarrow e^{x}=2 \Rightarrow$$

$t=-1 \Rightarrow e^{x}=-1 \Rightarrow$ אין פתרון . $x=\ln 2=0.69 \Rightarrow$ **(ln2;0)**

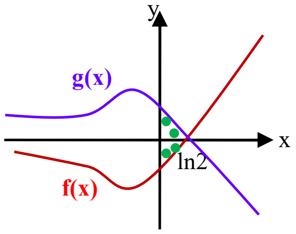
4)



ב. 1) $g(x)=-f(x)$ לכן הגרף של הפונקציה $g(x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ ביחס לציר ה- x :
נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x היא **(ln2;0)** ועם ציר ה- y : **(0;2)**



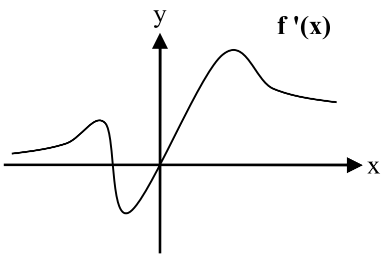
2) נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ היא **(ln0.5;2.25) נקודת מקסימום** .



(3 $$S=\int_0^{\ln 2}\big(g(x)-f(x)\big)dx=\int_0^{\ln 2}\Big((-e^{2x}+e^x+2)-(e^{2x}-e^x-2)\Big)dx$$

$$\int_0^{\ln 2}\left(-2e^{2x}+2e^x+4\right)dx=\left[-\frac{2e^{2x}}{2}+2e^x+4x\right]_0^{\ln 2}=4\ln 2-1=\mathbf{1.77}$$

.5 בציור שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.



א. קבע , על פי הציור , כמה משיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ מקבילים לציר ה- x ? נמק.

ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא $f(x)=\ln(x^2e^{2x+3}+e)$.

1) הראה שהפונקציה מוגדרת לכל ערך של x .

2) מצא את נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה- x .

3) חשב את השטח המוגבל בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ וציר ה- x .

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון , את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

<u>פתרון:</u>

א. אם משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ המקביל לציר ה- x אז שיפועו 0 , כלומר, ערך הנגזרת בנקודת ההשקה הוא 0 . על פי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, יש שתי נקודות בהן ערך הנגזרת הוא 0 .

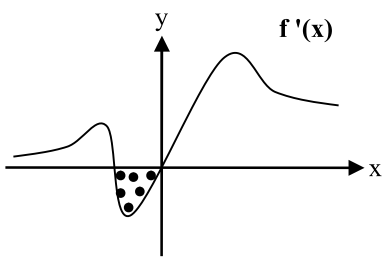
לכן: לגרף הפונקציה $f(x)$ יש **שני משיקים המקבילים לציר ה- x** .

ב. 1) תחום ההגדרה: $x^2e^{2x+3}+e>0$. היות ומתקיים : $x^2\ \geq\ 0$ לכל ערך של x , $e^{2x+3}>0$

לכל ערך של x , $e>0$, הרי שהסכום $x^2e^{2x+3}+e$ חיובי לכל ערך של x .

(2 $$f'(x)=\frac{2xe^{2x+3}+x^2e^{2x+3}\cdot 2}{x^2e^{2x+3}+e}=\frac{2e^{2x+3}(x+x^2)}{x^2e^{2x+3}+e}=0\Rightarrow 2e^{2x+3}(x+x^2)=0\Rightarrow$$

$$x+x^2=0\Rightarrow x(1+x)=0\Rightarrow x_1=0\ ,\ x_2=-1\Rightarrow\qquad \mathbf{(-1;0)\ ,\ (0;0)}$$



(3 $$S=\int_{-1}^{0}-f'(x)dx=\left[-f(x)\right]_{-1}^{0}=-f(0)+f(-1)=$$

$$-\ln(e)+\ln(e+e)=\ln(2e)-\ln(e)=\ln(\frac{2e}{e})=$$

$$\mathbf{\ln 2=0.693}$$

ג.

x	x <	-1	< x <	0	< x
f '(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗	Max	↘	min	↗

מקסימום (-1;1.693) $f(-1)=\ln(e+e)=\ln 2e=1.693\Rightarrow$

מינימום (0;1) $f(0)=\ln(e)=1\Rightarrow$

תחומי עלייה: $x<-1$, $x>0$; תחום ירידה: $-1<x<0$

תשובות

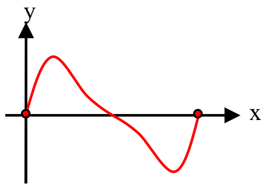
1. א. $d = 14$ ב. $n = 35$ ג. 1) 18 2) 4356 ד. 12

2. א. 1) 64.99^{o} 2) 50.02^{o} 3) 28.78^{o} ב. 1) 345.9 סמ"ר 2) 554.2 סמ"ק

3. א. 1) $(2\pi;0)$, $(\pi;0)$, $(0;0)$ 2) $(\frac{\pi}{3};\frac{3\sqrt{3}}{2})$, $(\pi;0)$, $(\frac{5\pi}{3};-\frac{3\sqrt{3}}{2})$

3) $(0;0)$ מינימום , $(\frac{\pi}{3};\frac{3\sqrt{3}}{2})$ מקסימום ,

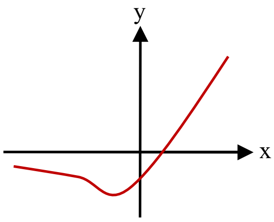
$(\frac{5\pi}{3};-\frac{3\sqrt{3}}{2})$ מינימום , $(2\pi;0)$ מקסימום 4)



ב. גרף I. ג. $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ו - $k = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

4. א. 1) $x = \ln 0.5$ נקודת מינימום 2) $f(x) = e^{2x} - e^{x} - 2$

3) $(0;-2)$, $(\ln 2;0)$ 4)



ב. 1) $(0;2)$, $(\ln 2;0)$ 2) $(\ln 0.5;2.25)$ נקודת מקסימום

3) 1.77

5. א. שניים ב. 2) $(0;0)$, $(-1;0)$ 3) 0.693

ג. מקסימום $(-1;1.693)$, מינימום $(0;1)$

תחומי עלייה: $x < -1$, $x > 0$; תחום ירידה: $-1 < x < 0$

מבחן מס' 2

פרק א- סדרות וטריגונומטריה במרחב

סדרות

1. נתונה סדרה הנדסית של שמונה איברים חיוביים. סכום שש האיברים הראשונים קטן פי ארבעה מסכום שש האיברים האחרונים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. אם נוסיף 2 לאיבר השלישי, נחסר 4 מן האיבר חמישי ונחסר 40 מן האיבר השביעי , הרי ששלושת המספרים שמתקבלים יוצרים סדרה הנדסית חדשה.

1) מצא את האיבר הראשון של הסדרה המקורית.

2) מצא את המנה של הסדרה ההנדסית החדשה.

פתרון:

א. הסדרה היא: $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$.

סכום 6 האיברים הראשונים $a_1+a_2+...+a_6$: $S_6=\frac{a_1(q^6-1)}{q-1}$.

סכום 6 האיברים האחרונים: $a_3+a_4.....+a_8$: $S_6=\frac{a_3(q^6-1)}{q-1}$ אחרונים .

נתון: $\Rightarrow 4\cdot\frac{a_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{a_3(q^6-1)}{q-1}$

$$4a_1(q^6-1)=a_3(q^6-1)\Rightarrow 4a_1=a_3\Rightarrow 4a_1=a_1q^2\Rightarrow 4=q^2$$

כל אברי הסדרה חיוביים , לכן: $\mathbf{q=2}$.

ב. 1) הסדרה החדשה: $a_3+2\ ,\ a_5-4\ ,\ a_7-40 \Leftarrow a_1q^2+2\ ,\ a_1q^4-4\ ,\ a_1q^6-40 \Leftarrow$

$4a_1+2\ ,\ 16a_1-4\ ,\ 64a_1-40$ יוצרים סדרה הנדסית , לכן:

$$\frac{16a_1-4}{4a_1+2}=\frac{64a_1-40}{16a_1-4} \Rightarrow (64a_1-40)(4a_1+2)=(16a_1-4)^2$$

$$256(a_1)^2+128a_1-160a_1-80=256(a_1)^2-128a_1+16\Rightarrow$$

$$96a_1=96\Rightarrow \mathbf{a_1=1}$$

2) אברי הסדרה החדשה הם: $6\ ,\ 12\ ,\ 24$ לכן , המנה של הסדרה החדשה היא **2** .

טריגונומטריה במרחב

.2 נתונה תיבה 'ABCDA'B'C'D שבסיסה מלבן.

הנקודה E נמצאת על המקצוע AD כך ש- $BE \perp CE$.

נתון: $BC = 16$ ס"מ , $\sphericalangle EBC = 40^\circ$.

א. 1) חשב את אורך הקטע EB.

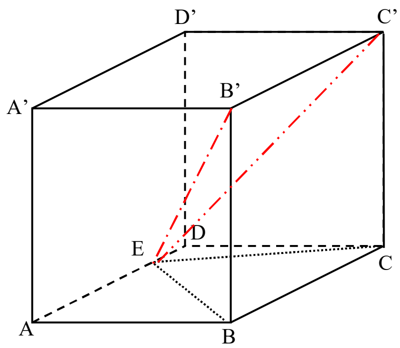
2) חשב את אורך המקצוע AB .

ב. אורך אלכסון הפאה 'BCC'B הוא 32 ס"מ.

1) חשב את נפח התיבה 'ABCDA'B'C'D.

2) חשב את הזווית שיוצר הקטע B'E עם בסיס התיבה.

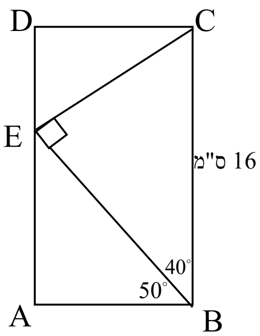
3) חשב את הזווית שיוצר הקטע C'E עם בסיס התיבה.



<u>פתרון:</u>

א. 1) במשולש ישר הזווית BEC :

$$\cos 40^\circ = \frac{EB}{16} \Rightarrow \mathbf{EB = 12.257}$$ **ס"מ** .

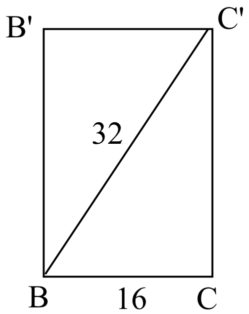


2) $\sphericalangle EBC = 40^\circ, \sphericalangle ABC = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle EBA = 50^\circ$.

במשולש ישר הזווית ABE :

$$\cos 50^\circ = \frac{AB}{12.257} \Rightarrow \mathbf{AB = 7.879}$$ **ס"מ** .

ב. 1) במלבן 'BCC'B:



$$(CC')^2 + 16^2 = 32^2 \Rightarrow CC' = 16\sqrt{3} = 27.713$$.

שטח בסיס התיבה הוא סמ"ר $7.879 \cdot 16 = 126.06$.

נפח התיבה 'ABCDA'B'C'D:

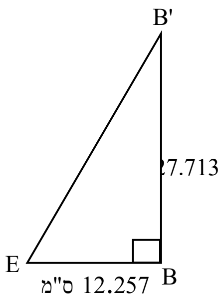
$$V = 7.879 \cdot 16 \cdot 16\sqrt{3} = \mathbf{3493.588}$$ **סמ"ק** .

2) 'BB מאונך לבסיס התיבה , לכן הקטע BE

הוא ההיטל של B'E על בסיס התיבה. הזווית בין

B'E לבסיס התיבה היא הזווית $\sphericalangle B'EB$.

חישוב במשולש B'EB :



$$\tan \sphericalangle B'EB = \frac{27.713}{12.257} = 2.261 \Rightarrow \sphericalangle B'EB = \mathbf{66.14^\circ}$$

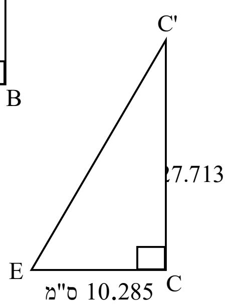
3) במשולש BEC :

$$\sin 40^\circ = \frac{EC}{16} \Rightarrow EC = 10.285$$.

במשולש C'CE:

CE ההיטל של C'E על בסיס התיבה לכן

הזווית המבוקשת היא $\sphericalangle C'EC$. מקבלים :



$$\tan \sphericalangle C'EC = \frac{27.713}{10.285} = 2.695 \Rightarrow$$

$$\sphericalangle C'EC = \mathbf{69.64^\circ}$$

<u>פרק ב</u>- בעיות גדילה ודעיכה, חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות חזקה עם מעריך רציונלי, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

.3 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sin(2x) -1$ בתחום: $0 \le x \le \pi$.

א. 1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון.

3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

4) כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = -3.2$? נמק.

ב. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת גם בתחום $0 \le x \le \pi$ ומקיימת: $g'(x) = f(x)$.

1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון.

2) מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.

3) נתון: $g(0) = -1$, $g(\pi) = -4.14$. גרף הפונקציה $g(x)$ אינו חותך את ציר ה- x .

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

<u>פתרון:</u>

א. (1 $2\sin(2x) -1 = 0 \Rightarrow 2\sin(2x) = 1 \Rightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\text{I.}\quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \pi k\ ,\quad \text{II.}\quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$$

הפתרונות בתחום הנתון: $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{5\pi}{12}$.

מתקבלות הנקודות : $\mathbf{(\frac{5\pi}{12};0)}$, $\mathbf{(\frac{\pi}{12};0)}$.

(2 נקודות קיצון: $f(x) = 2\sin(2x) -1 \Rightarrow f'(x) = 4\cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0 \Rightarrow$

הפתרון בתחום הנתון: $\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$

מקבלים:

x	0	< x <	0.25π	< x <	0.75π	< x <	π
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	min	↗	max	↘	min	↗	max

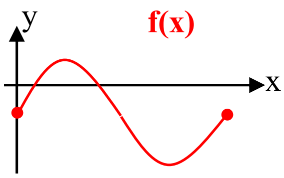
$$f(0) = -1\ ,\ f(\frac{\pi}{4}) = 1\ ,\ f(\frac{3\pi}{4}) = -3\ ,\ f(\pi) = -1$$

נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון הן :

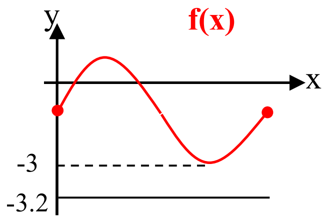
מינימום $(0; -1)$, מקסימום $(\frac{\pi}{4};1)$,

מינימום $(\frac{3\pi}{4}; -3)$, מקסימום $(\pi;-1)$

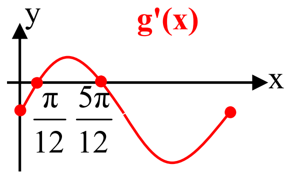
(3



4) **אין פתרון** , כי הערך המינימלי
של הפונקציה הוא 3 -



ב. 1) -1 $g'(x)=f(x)=2\sin(2x)$.
על פי תחומי החיוביות והשליליות
של $g'(x)$, על פי גרף הפונקציה $f(x)$
מקבלים :

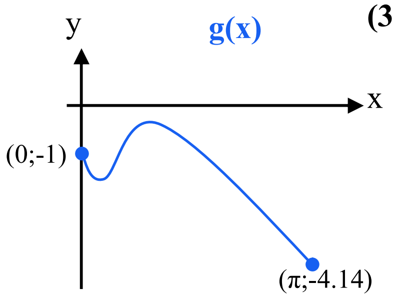


x	0	$<x<$	$\frac{\pi}{12}$	$<x<$	$\frac{5\pi}{12}$	$<x<$	π
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	max	↘	min	↗	max	↘	min

תחום העלייה של $g(x)$: $\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$, תחומי הירידה: $\frac{5\pi}{12}<x<\pi$, $0<x<\frac{\pi}{12}$.

2) $x=0$ נקודת מקסימום , $x=\frac{\pi}{12}$ נקודת מינימום , $x=\frac{5\pi}{12}$ נקודת מקסימום ,
$x=\pi$ נקודת מינימום

3)



4. בשמורת טבע גדולה נערך מעקב אחר שני סוגים של ציפורים המקננות בשמורה. התברר שמספר הציפורים משני הסוגים משתנה בקצב קבוע.

במדידה הראשונה, מספר הציפורים מסוג I היה גדול פי 5 ממספר הציפורים מסוג II.

כעבור שנה, ירד מספר הציפורים מסוג I ב- 20%. במדידה שנערכה שנתיים לאחר המדידה הראשונה, התברר שמספר הציפורים מסוג I גדול פי 2.048 ממספר הציפורים מסוג II.

א. 1) מצא את קצב הדעיכה של מספר הציפורים מסוג I בשמורה.

2) מצא את קצב השינוי של הציפורים מסוג II בשמורה.

3) האם הציפורים מסוג II מתרבות או נכחדות ?

ב. נתונות הפונקציות $f(x)=120\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{x}$ ו- $g(x)=600\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{-x}$ בתחום $x\ge 0$.

1) מצא לכל אחת מן הפונקציות, את נקודות החיתוך שלה עם הצירים (אם יש כאלה).

2) מצא את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מן הפונקציות (אם יש כאלה).

3) סרטט, באותה מערכת צירים, את הגרפים של הפונקציות f(x) ו- g(x).

ג. אחת הפונקציות מתארת את מספר הציפורים מסוג I בשמורה כפונקציה של הזמן x, והשנייה מתארת את מספר הציפורים מסוג II בשמורה כפונקציה של הזמן x.

1) איזו פונקציה מתארת את תהליך השינוי של מספר הציפורים מסוג II ? נמק.

2) מצא את f(2) ו- g(2) ובדוק האם התוצאה תואמת את הנתונים.

3) האם, בזמן כלשהו לאחר המדידה הראשונה, היה מספר הציפורים מסוג I שווה למספר הציפורים מסוג II ? אם כן, כעבור כמה זמן ?

<u>פתרון:</u>

א. 1) מספר הציפורים משני הסוגים משתנה על פי הנוסחה $M_t=M_0\cdot q^t$.

לגבי הציפורים מסוג I נתון שמספרם יורד מדי שנה ב- 20%, כלומר:

$$q=1-\frac{20}{100}=\frac{4}{5}=\mathbf{0.8}$$

2)

	M_t	t	q	M_0
סוג I	$5a\cdot 0.8^2=3.2a$	2	0.8	5a
סוג II	$a\cdot q^2$	2	q	a

על פי הנתונים: $3.2a=2.048\cdot a\cdot q^2 \Rightarrow q^2=1.5625 \Rightarrow \mathbf{q=1.25}$

3) $q>1$, לכן, התהליך הוא תהליך של גדילה. הציפורים מסוג II **מתרבות**.

ב. 1) f(x): $f(0)=120\left(\frac{5}{4}\right)^0=120\Rightarrow \mathbf{(0;120)}$.

$f(x)=0 \Rightarrow\ 120\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{x}=0 \Rightarrow$ אין פתרון , אין חיתוך עם ציר ה- x

g(x): $g(0)=600\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{0}=600 \Rightarrow \mathbf{(0;600)}$. אין נקודת חיתוך עם ציר ה- x .

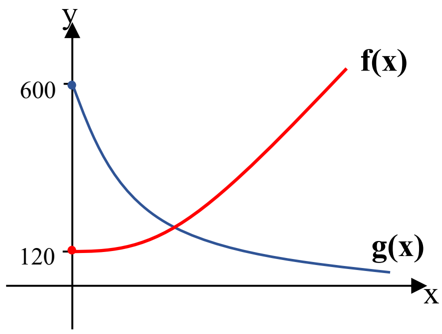
2) f(x) : $f(x)=120\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{x} \Rightarrow f'(x)=120\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{x}\cdot\ln(\frac{5}{4})=26.78\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{x}>0$

f '(x) חיובית לכל ערך של x , לכן, הפונקציה f(x) **עולה בכל תחום הגדרתה** ($x\geq 0$)

g(x) : $g(x)=600\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{-x} \Rightarrow g'(x)=600\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{-x}\cdot(-1)\cdot\ln(\frac{5}{4})=-133.89\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{-x}<0$

g'(x) שלילית לכל x , לכן g(x) **יורדת בכל תחום הגדרתה**

3)



ג. 1) הציפורים מסוג II מתרבות , התהליך הוא תהליך של גדילה לכן הפונקציה עולה.

הפונקציה המתאימה היא **f(x)** .

2) $f(2)=120\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{2}=187.5\ ,\ g(2)=600\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}=384 \Rightarrow$

$\frac{g(2)}{f(2)}=\frac{384}{187.5}=2.048 \Rightarrow \mathbf{g(2)=2.048\cdot f(2)}$. תואם את נתוני השאלה .

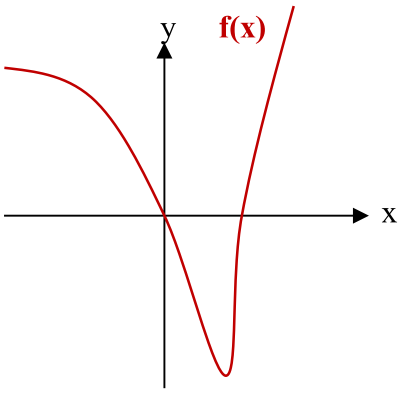
3) $f(x)=g(x) \Rightarrow 120\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{x}=600\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{-x} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{x}=5\cdot\frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^{x}} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{2x}=5 \Rightarrow$

$$\ln\left(\frac{5}{4}\right)^{2x}=\ln 5 \Rightarrow 2x\cdot\ln\left(\frac{5}{4}\right)=\ln 5 \Rightarrow 2x=7.21257 \Rightarrow x=3.61 \Rightarrow$$

כן , כעבור 3.61 שנים אחרי המדידה הראשונה

5. א. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה

$f(x)=e^{2x}-9e^{x}+8$ המוגדרת לכל x.



1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\ln\left[f(x)\right]$.

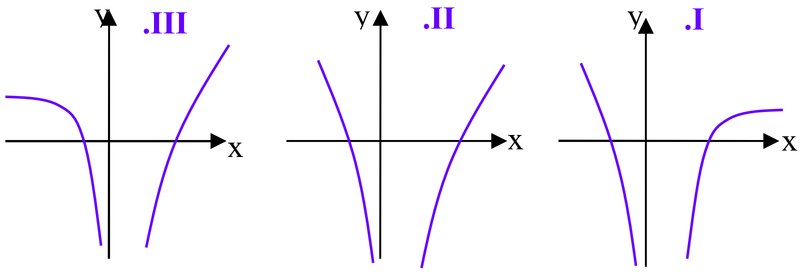
1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

2) מצא את האסימפטוטות לגרף הפונקציה $g(x)$ המאונכות לציר ה- x.

3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

4) מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הישר $y=\ln 18$.

5) איזה מן הגרפים הבאים מתאים לתאר את גרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

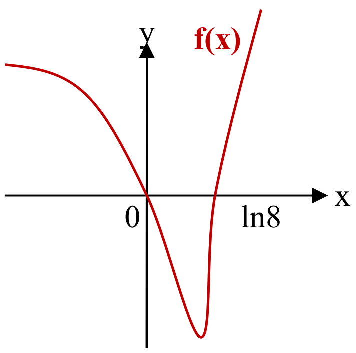


<u>פתרון:</u>

א. 1) חיתוך עם ציר ה- y : $f(0)=1-9+8=0\Rightarrow \mathbf{(0;0)}$

חיתוך עם ציר ה- x : $0=e^{2x}-9e^{x}+8\Rightarrow e^{x}=t\Rightarrow t^{2}-9t+8=0\Rightarrow t=1,t=9\Rightarrow$

$\text{I. } e^{x}=8\Rightarrow x=\ln 8\Rightarrow \mathbf{(\ln 8;0)}\ ,\ \text{II. } e^{x}=1\Rightarrow x=0\Rightarrow \mathbf{(0;0)}$



2) **תחום החיוביות:** $\mathbf{x<0\ ,\ x>\ln 8}$

תחום השליליות: $\mathbf{0<x<\ln 8}$

ב. 1) תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)=\ln\left[f(x)\right]$

הוא התחום בו $f(x)>0$. על פי הסעיף הקודם

מתקבל התחום: $\mathbf{x<0\ ,\ x>\ln 8}$.

2) האסימטוטות הן: $\mathbf{x=0\ ,\ x=\ln 8}$

3) $g(x)=\ln\left[f(x)\right]\Rightarrow g(x)=\ln(e^{2x}-9e^{x}+8)\Rightarrow g'(x)=\dfrac{2e^{2x}-9e^{x}}{e^{2x}-9e^{x}+8}=0\Rightarrow$

$2e^{2x}-9e^{x}=0\Rightarrow e^{x}(2e^{x}-9)=0\Rightarrow e^{x}>0\Rightarrow$

$$2e^x - 9 = 0 \Rightarrow e^x = 4.5 \Rightarrow x = \ln 4.5 \ , \ 0 < \ln 4.5 < \ln 8 \Rightarrow$$

התוצאה לא נמצאת בתחום ההגדרה , לכן , אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון

x	$x<$	0	$<x<$	$\ln 8$	$<x$
$g'(x)$	-				+
$g(x)$	↘				↗

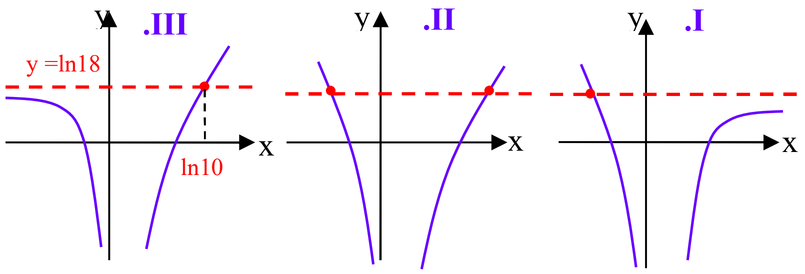
תחום העלייה: $x > \ln 8$, תחום הירידה: $x < 0$

4) $\ln(e^{2x} - 9e^x + 8) = \ln 18 \Rightarrow e^{2x} - 9e^x + 8 = 18 \Rightarrow e^{2x} - 9e^x - 10 = 0 \Rightarrow$

$t^2 - 9t - 10 = 0 \Rightarrow t = 10, t = -1 \Rightarrow e^x = 10 \Rightarrow x = \ln 10 \Rightarrow \mathbf{(\ln 10; \ln 18)}$

למשוואה $e^x = -1$ אין פתרון.

5)



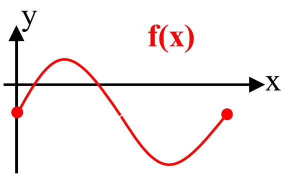
הגרף היחיד המתאים גם לתחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ וגם לעובדה שגרף הפונקציה חותך את הישר $y = \ln 18$ בנקודה אחת שבה $x = \ln 10$, הוא **גרף III.**

תשובות

1. א. 2 ב. 1) 1 2) 2

2. א. 1) 12.257 ס"מ 2) 7.879 ס"מ ב. 1) 3493.588 סמ"ק 2) 66.14° 3) 69.64°

3. א. 1) $(\frac{5\pi}{12};0)$, $(\frac{\pi}{12};0)$ 2) $(0;-1)$ מינימום ,
3) $(\frac{\pi}{4};1)$ מקסימום , $(\frac{3\pi}{4};-3)$ מינימום , $(\pi;-1)$ מקסימום

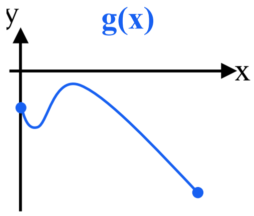


4) אין פתרון כי הערך המינימלי של הפונקציה הוא -3

ב. 1) תחום עלייה: $\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$, תחומי ירידה : $0<x<\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}<x<\pi$

2) $x=0$ מקסימום , $x=\frac{\pi}{12}$ מינימום ,

3) $x=\frac{5\pi}{12}$ מקסימום , $x=\pi$ מינימום



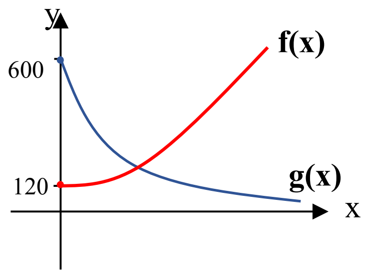
4. א. 1) 0.8 2) 1.25 3) מתרבות ב. 1) f(x) : (0;120) , g(x) : (0;600)

2) f(x) : תחום עלייה $x\geq 0$, תחום ירידה : אין ;

3) g(x) : תחום עלייה: אין , תחום ירידה: $x\geq 0$.

ג. 1) f(x) 2) כן : $g(2)=2.048\cdot f(2)$.

3) כן , כעבור 3.61 שנים אחרי המדידה הראשונה



5. א. 1) $(0;0)$, $(\ln 8;0)$ 2) תחום החיוביות: $x<0$, $x>\ln 8$;
תחום השליליות: $0<x<\ln 8$ ב. 1) $x<0$, $x>\ln 8$ 2) $x=0$, $x=\ln 8$

3) תחום העלייה: $x>\ln 8$, תחום הירידה: $x<0$ 4) $(\ln 10;\ln 18)$ 5) גרף III